BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
GROUPEMENT A

MATHÉMATIQUES

Session 2021

Durée : 3 heures

SPECIALITES	Coefficient
Électrotechnique	**2**
Systèmes Photoniques	**3**
Techniques physiques pour l'industrie et le laboratoire	**3**

Matériel autorisé :
L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Le candidat n'utilise **qu'une seule machine sur la table**.
Toutefois, si celle-ci vient à connaître une défaillance, il peut la remplacer par une autre.
Les échanges de machine entre les candidats sont interdits.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 sur 6 à 6 sur 6.

L'annexe, page 6, est à rendre avec la copie.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (11 points)

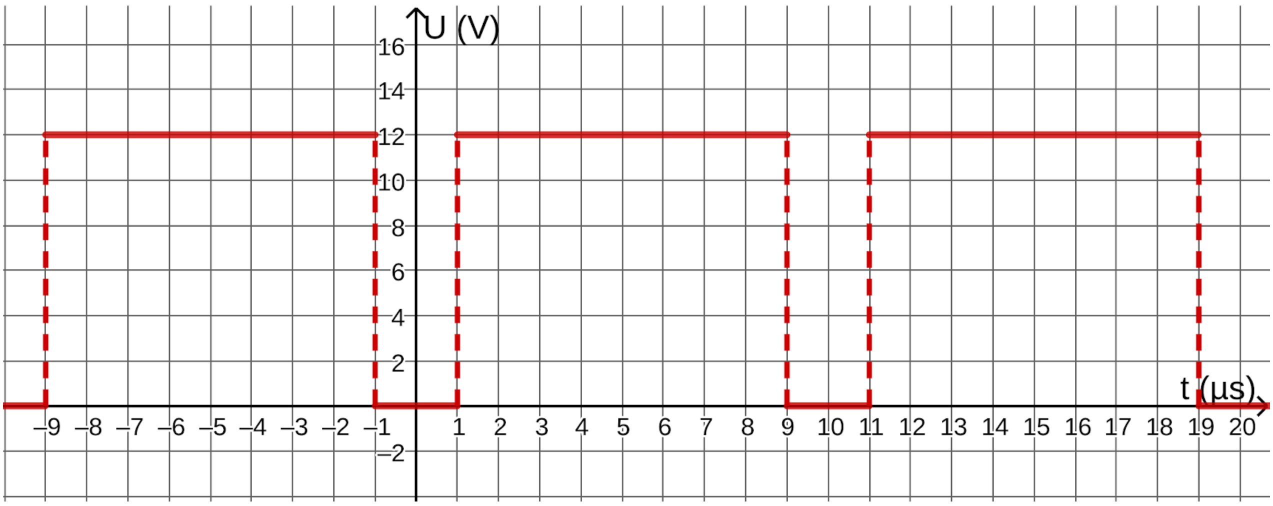
La communication par **courants porteurs en ligne** (ou **CPL**) permet de transmettre des informations en utilisant des conducteurs électriques en fonctionnement.
Le principe des CPL consiste à superposer au réseau électrique un signal de haute fréquence et de basse énergie. Ce deuxième signal se propage sur l'installation électrique et peut être reçu et décodé à distance.

Les parties A, B, C de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A : Étude d'un signal

On s'intéresse à une tension périodique U. On note T sa période.

1. On donne ci-dessous une représentation graphique de U, exprimée en volt (V), en fonction de *t* **exprimé en microseconde (µs).** Rappel : $1\mu s = 10^{-6} s$.



a) D'après la représentation graphique ci-dessus, quelle est la valeur de T en microseconde ?

b) La fréquence d'un signal périodique, en Hz, suit la formule : $f = \frac{1}{T}$, où T est exprimé en seconde. Quelle est la fréquence de la tension périodique U ?

2. On modélise l'évolution de U (en volt) en fonction de *t* (en microseconde) à l'aide d'une fonction numérique *f* définie sur **R**. Ainsi : $U = f(t)$.

On admet que la fonction f est paire, périodique de période T, développable en série de Fourier et vérifie, pour tout réel t :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \text{ avec } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

a) Quelle est la valeur de b_n pour tout entier $n \geq 1$? Justifier.

b) $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt$. Justifier que $a_0 = 9{,}6$.

3. La valeur efficace de U, notée U_{eff}, vérifie : $U_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2 dt$.
Montrer que : $U_{eff} \approx 10{,}7$ V

4. Le signal correspondant à la tension U est envoyé sur une ligne moyenne tension transportant une tension efficace de $M = 20\,000$ V.
Le taux de distorsion harmonique par rapport au fondamental, noté T_F, est donné par la formule suivante :

$$T_F = \sqrt{\frac{U_{eff}^2 - a_0^2}{M^2}}$$

On considère qu'un CPL n'a pas d'incidence sur le réseau si T_F est inférieur à 0,1%.
Le CPL étudié dans la partie A a-t-il une incidence sur le réseau ?

Partie B : Transmission numérique

Le signal porteur étudié en partie A peut être utilisé pour transmettre des signaux numériques (bits) durant chaque période.
Dans certaines conditions des bits peuvent être mal transmis. On se place, dans cette partie, dans ces conditions.
On transmet, durant chaque période, 80 bits. Chaque bit a une probabilité égale à 0,015 d'être mal transmis. On note X la variable aléatoire qui associe à chaque période le nombre de bits mal transmis durant cette période.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? On précisera ses paramètres. Aucune justification n'est demandée.

2. Calculer la probabilité que tous les bits soient correctement transmis durant une période. Arrondir la réponse au millième.

3. Calculer la probabilité que strictement plus de 4 bits soient mal transmis. Arrondir la réponse au millième.

4. **a)** Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

b) On considère que la ligne est de bonne qualité si, en moyenne, moins de deux bits sont mal transmis durant une période. La ligne est-elle de bonne qualité ?

Partie C : Durée de vie d'un coupleur CPL

Un coupleur CPL est un équipement qui permet de transmettre le signal entre deux conducteurs de la ligne.
On s'intéresse à la durée de vie, en situation normale de fonctionnement, de coupleurs CPL d'une certaine marque. On modélise la durée de vie, exprimée en année, d'un tel coupleur par une variable aléatoire Y suivant une loi normale de moyenne 12 et d'écart-type 2.

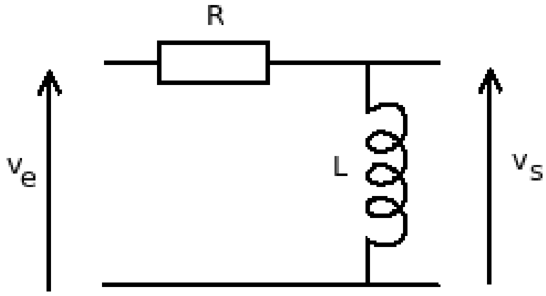
1. Calculer la probabilité qu'un coupleur ait une durée de vie comprise entre 10 et 12 ans. Arrondir la réponse au millième.

2. Calculer la probabilité qu'un coupleur ait une durée de vie supérieure à 10 ans. Arrondir la réponse au millième.

3. Sachant qu'un coupleur est toujours en fonctionnement au bout de 10 ans, calculer la probabilité qu'il cesse de fonctionner dans les deux années suivantes. Arrondir la réponse au millième.

EXERCICE 2 (9 points)

Le montage suivant est composé d'une bobine d'inductance $\mathrm{L} = 0{,}001$ henry et d'une résistance R (en ohm) , assemblées en série.
Ce montage est utilisé pour l'extraction d'un signal CPL haute fréquence du réseau.



Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A : Test du filtre

Dans cette partie, la valeur de R est un paramètre strictement positif fixé.

Pour tester ce montage on le soumet à une tension d'entrée constante $\mathrm{v_e} = 12$ volts.
On s'intéresse à la tension de sortie $\mathrm{v_s}(t)$, exprimée en volt, en fonction du temps t (en seconde), aux bornes de la bobine L.
À $t = 0$, on admet que la tension aux bornes de la bobine est égale à 12 volts.

La tension $\mathrm{v_s}$ vérifie, pour tout $t \geq 0$: $\mathrm{v_s'}(t) + \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\mathrm{v_s}(t) = 0$

1. On rappelle que l'équation différentielle $ay' + by = 0$ (avec a et b réels et $a \neq 0$) admet pour solutions les fonctions définies, pour tout réel t , par :

$$y(t) = K\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t} \text{ , avec } K \text{ constante réelle.}$$

Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$(E)\text{: } y'(t) + \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}y(t) = 0$$

2. En déduire que pour tout $t \geq 0$: $\mathrm{v_s}(t) = 12\mathrm{e}^{-1000\mathrm{R}t}$

3. a) Quel est le sens de variation de la fonction $\mathrm{v_s}$? Justifier.

b) Déterminer la limite de $\mathrm{v_s}(t)$ lorsque t tend vers l'infini. Justifier.

4. En précisant la méthode utilisée, déterminer la valeur de R (à 0,1 ohm près) telle que, pour $t = 0{,}001$, la tension $\mathrm{v_s}(t)$ soit égale à 1% de la tension d'entrée $\mathrm{v_e}$.

Partie B : Étude du filtre

Les résultats figurant dans le tableau suivant pourront être utilisés.
Ils mettent en jeu la fonction échelon $\mathcal{U}$ définie par : $\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 0 \; si \; t < 0 \\ 1 \; si \; t \; \geq 0 \end{cases}$.

Fonction	**Transformée de Laplace**
$t \longmapsto \mathcal{U}(t)$	$p \longmapsto \dfrac{1}{p}$
$t \longmapsto t\mathcal{U}(t)$	$p \longmapsto \dfrac{1}{p^2}$
$t \mapsto \mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t), a \in \mathbf{R}$	$p \longmapsto \dfrac{1}{p+a}$
$t \longmapsto \mathcal{U}(t-a), a \in \mathbf{R}$	$p \longmapsto \dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-ap}$
Dans ce qui suit, f est une fonction ayant une transformée de Laplace notée F.	
$t \longmapsto f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t), a \in \mathbf{R}$	$p \longmapsto F(p+a)$
$t \mapsto f(t-a)\mathcal{U}(t-a), a \in \mathbf{R}$	$p \longmapsto F(p)\mathrm{e}^{-ap}$

Dans cette partie, on poursuit l'étude du montage représenté en début d'énoncé.
On rappelle que $L = 0{,}001$ henry et on prend $R = 5$ ohm.

On soumet le montage à une tension d'entrée $\mathrm{v_e}(t)$, en volt, en fonction du temps t (en seconde).
On s'intéresse à la tension de sortie $\mathrm{v_s}(t)$, en volt, en fonction du temps t (en seconde), aux bornes de la bobine L.

On admet que la fonction de transfert du montage est : $H(p) = \frac{p}{p+5000}$.
On rappelle que l'on a : $V_S(p) = H(p) \times V_E(p)$
où $V_E(p)$ est la transformée de Laplace de $\mathrm{v_e}(t)$ et $V_S(p)$ est la transformée de Laplace de $\mathrm{v_s}(t)$.

1. On considère que pour tout réel t : $\mathrm{v_e}(t) = 12\mathcal{U}(t) - 12\mathcal{U}(t - 8 \times 10^{-6})$.
Déterminer la valeur de $\mathrm{v_e}(t)$ pour $t < 0$, puis pour $0 \leq t \leq 8 \times 10^{-6}$ et enfin pour $t > 8 \times 10^{-6}$.

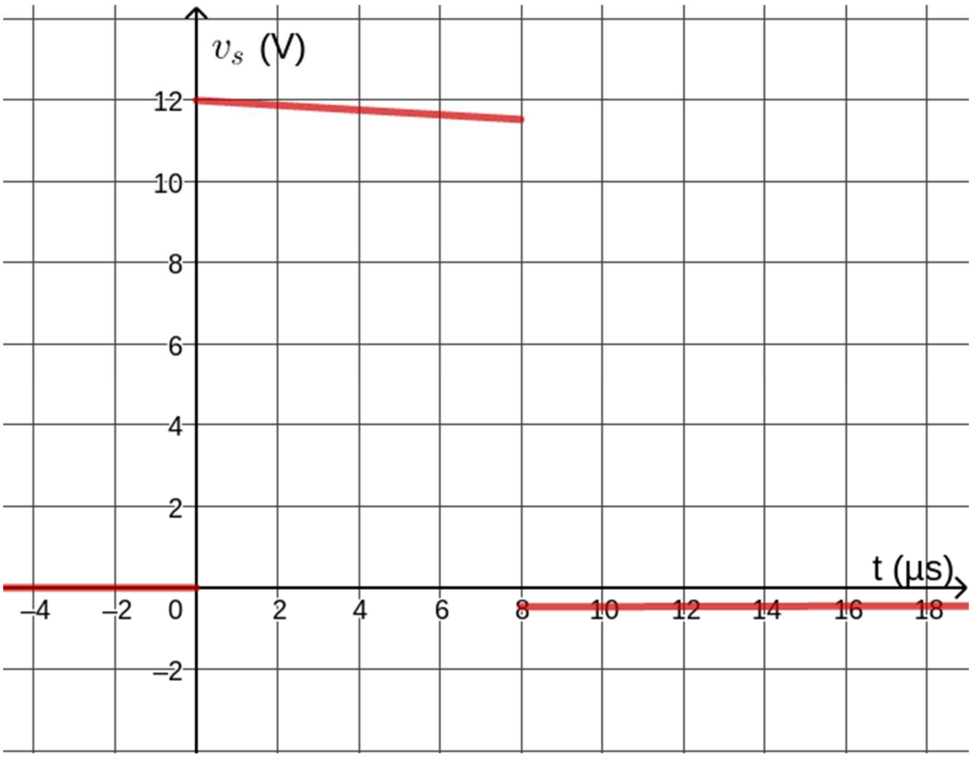
2. **a)** Déterminer la transformée de Laplace $V_E(p)$ de $\mathrm{v_e}(t)$.
b) En déduire que : $V_S(p) = \frac{12}{p+5000} - \frac{12}{p+5000}\mathrm{e}^{-8\times10^{-6}p}$.

3. Exprimer $\mathrm{v_s}(t)$ en fonction de t et de la fonction échelon $\mathcal{U}$.

4. On a représenté **en annexe (page 6)** la tension de sortie $\mathrm{v_s}$ en fonction de t **exprimé en microseconde**.
Sur le même graphique représenter la tension d'entrée $\mathrm{v_e}$.
Que constate-t-on ?

ANNEXE (à rendre avec la copie)

Exercice 2, partie B, question 4.



Modèle CMEN-DOC v2 A4 ©NEOPTEC

Nom de famille :
(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)

Prénom(s) :

Numéro Inscription :

Né(e) le : / /

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)