BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2019

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement Obligatoire – Coefficient 7

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1 à 8.

Exercice 1 (6 points) *Commun à tous les candidats*

Les parties A et B peuvent être abordées de façon indépendante.

Deux groupes de scientifiques, des spécialistes en environnement et des biologistes, étudient l'évolution d'une population de grenouilles autour d'un étang.

Partie A — Étude d'un modèle discret d'évolution

Le groupe de spécialistes en environnement étudie le taux de disponibilité des ressources nécessaires pour le développement de la population de grenouilles autour de l'étang. Ce taux dépend notamment du nombre de grenouilles présentes sur les lieux, de la quantité de nourriture à disposition, de l'espace disponible et de la qualité de l'environnement.

Une étude, menée en 2018 par ce premier groupe de scientifiques, a permis d'estimer le taux de disponibilité des ressources à 0,9 ; cela signifie que 90 % des ressources sont disponibles.

On modélise le taux de disponibilité des ressources par la suite (T_n) qui, à tout entier naturel n, associe le taux de disponibilité des ressources n années après 2018. On a ainsi $T_0 = 0{,}9$.

Le modèle choisi est tel que, pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1} = T_n - 0{,}1T_n^2$.

1. Certains spécialistes en environnement estiment qu'en 2022, le taux de disponibilité des ressources sera proche de 0,4. Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?

2. On définit la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f(x) = x - 0{,}1x^2$. Ainsi, la suite (T_n) vérifie pour tout entier naturel n, $T_{n+1} = f(T_n)$.

- **a.** Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$.
- **b.** Montrer que pour tout n entier naturel, on a : $0 \leq T_{n+1} \leq T_n \leq 1$.
- **c.** La suite (T_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

3. Le groupe de spécialistes en environnement affirme que, selon ce modèle, le taux de disponibilité des ressources peut être inférieur à 0,4 au cours des vingt premières années qui suivent le début de l'étude et qu'il est capable de déterminer en quelle année, ce seuil serait atteint pour la première fois.
Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?

Partie B — Étude d'un modèle continu d'évolution

Le groupe de biologistes a choisi une autre option et travaille sur le nombre de grenouilles peuplant l'étang. Au 1er janvier 2018, il avait été dénombré 250 grenouilles.

Les biologistes estiment que le nombre de grenouilles présentes autour de l'étang peut être modélisé par la fonction P définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $P(t) = \frac{1000}{0,4+3,6\ \mathrm{e}^{-0,5t}}$ où t est le temps, mesuré en années, écoulé depuis le 1er janvier 2018 (cette fonction découle d'un modèle continu, usuel en biologie, le modèle de Verhulst).

1. Calculer $P'(t)$ où P' est la fonction dérivée de P puis étudier le signe de $P'(t)$ pour t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$ puis dresser le tableau de variation de la fonction P sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

3. Montrer qu'il existe une unique valeur $t_0 \in [0\ ;\ +\infty[$ telle que $P(t_0) = 2000$. Déterminer cette valeur à 10^{-1} près.

4. Selon ce modèle, déterminer au cours de quelle année la population de l'étang aura dépassé pour la première fois les 2000 grenouilles.

Exercice 2 (5 points) ***Commun à tous les candidats***

Dans cet exercice, les probabilités demandées seront précisées à 10^{-4} *près.*

Lors d'une communication électronique, tout échange d'information se fait par l'envoi d'une suite de 0 ou de 1, appelés bits, et cela par le biais d'un canal qui est généralement un câble électrique, des ondes radio …
Une suite de 8 bits est appelé un octet. Par exemple, 10010110 est un octet.

Partie A

On se place dans le cas où l'on envoie, sur le canal, successivement 8 bits qui forment un octet.

On envoie un octet au hasard. On suppose la transmission de chaque bit indépendante de la transmission des bits précédents. On admet que la probabilité qu'un bit soit mal transmis est égale à 0,01.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de bits mal transmis dans l'octet lors de cette communication.

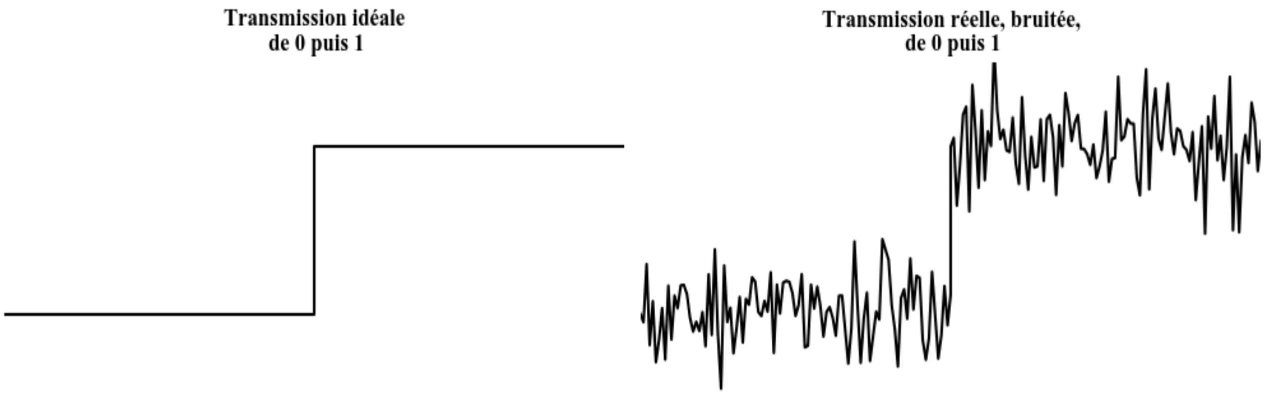
1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

2. Déterminer la probabilité qu'exactement deux bits de l'octet soient mal transmis.

3. Que peut-on penser de l'affirmation suivante : « La probabilité que le nombre de bits mal transmis de l'octet soit au moins égal à trois est négligeable » ? Argumenter.

Partie B

Les erreurs de transmission des bits sont liées à la présence de bruits parasites sur le canal de communication comme l'illustre la figure ci-dessous :



On admet que l'information d'un bit reçu, incluant le bruit, peut être modélisée à l'aide d'une variable aléatoire continue qui suit une loi normale dont l'espérance est liée à la valeur du bit envoyé.
On envoie un bit de valeur 1. On admet que l'information reçue d'un bit de valeur 1 peut être modélisée par une variable aléatoire R qui suit la loi normale d'espérance 1 et d'écart-type 0,3.

On considère que le bit reçu n'est pas correctement interprété lorsque la valeur de R est inférieure ou égale à 0,4.
Calculer la probabilité que le bit reçu ne soit pas correctement interprété.

Partie C

Afin de détecter si un ou plusieurs bits de l'octet sont mal transmis, on utilise un protocole de détection d'erreur. Il consiste à ajouter, à la fin de l'octet à transmettre, un bit, appelé bit de parité et qui est transmis après les huit bits de l'octet.

On s'intéresse désormais à la transmission de l'octet suivi de son bit de parité.

Une étude statistique a permis d'obtenir que :

- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis sans erreur vaut 0,922 ;
- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis avec exactement une erreur vaut 0,075 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis sans erreur, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0,99 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec exactement une erreur, la probabilité que le bit de parité ait été envoyé sans erreur vaut 0,9 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec au moins deux erreurs, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0,99 ;

On choisit au hasard un octet suivi de son bit de parité. On considère les évènements suivants :

- Z : « les huit bits de l'octet sont transmis avec aucune erreur » ;
- E : « les huit bits de l'octet sont transmis avec exactement une erreur » ;
- D : « les huit bits de l'octet sont transmis avec au moins deux erreurs » ;
- B : « le bit de parité est transmis sans erreur ».

1. Compléter l'arbre pondéré de **l'annexe 1 à rendre avec la copie**.

2. Quelle est la probabilité que l'octet soit transmis avec une erreur exactement et que le bit de parité soit transmis sans erreur ?

3. Calculer la probabilité de l'événement B.

Exercice 3 (4 points) ***Commun à tous les candidats***

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

1. On considère le nombre complexe $Z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Affirmation 1 : Le nombre complexe Z^2 est un réel positif.

Affirmation 2 : L'argument du nombre complexe Z^{2019} vaut 0 modulo 2π.

Dans ce qui suit, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

2. On considère dans **C** l'équation $2z^2 - 3z + 5 = 0$.

Affirmation 3 : Cette équation admet deux solutions dont les images sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

3. À tout point M d'affixe z du plan complexe, on associe le point M$'$ d'affixe z' par définie par :

$$z' = \bar{z}(1 - z).$$

Affirmation 4 : Il existe une infinité de points M confondus avec leur point image M$'$.

Exercice 4 (5 points)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Sur la figure donnée **en annexe 2 à rendre avec la copie**, on considère le cube ABCDEFGH de côté 6 cm dans le repère orthonormé $(\mathrm{A}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, l'unité étant le cm.

On admet que le point I a pour coordonnées $(6 ; 0 ; 3)$ dans ce repère.

On appelle L le milieu du segment [FG].

On appelle P le plan défini par les trois points E, I et L.

On rappelle que le volume du tétraèdre est donné par la formule $V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

1. a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P.

b. Déterminer une équation cartésienne du plan P.

2. Justifier que le volume du tétraèdre FELI est 9 cm³.

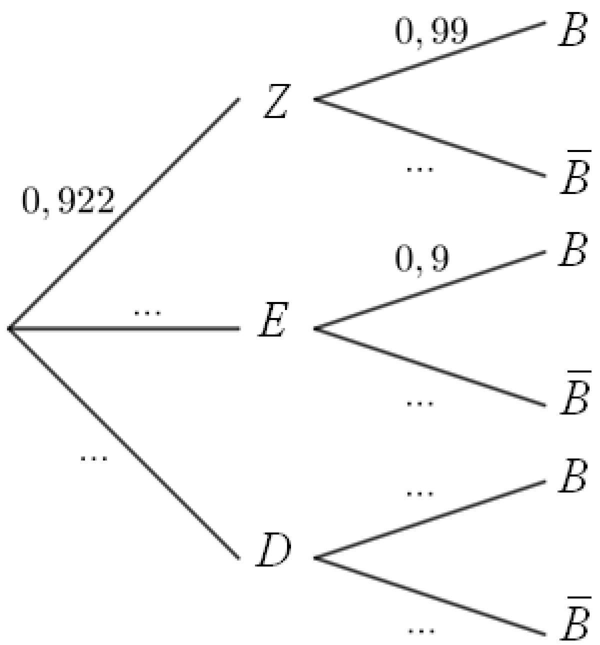
3. a. Soit Δ la perpendiculaire au plan P passant par le point F. Justifier que la droite Δ admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t + 6 \\ y = -2t \\ z = 2t + 6 \end{cases}$ avec $t \in \mathbf{R}$.

b. Montrer que l'intersection de la droite Δ et du plan P est le point $\mathrm{K}\left(\frac{16}{3}, \frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right)$.

4. Calculer l'aire en cm² du triangle ELI.

5. Tracer sur le graphique fourni **en annexe 2 à rendre avec la copie**, la section du cube ABCDEFGH par le plan parallèle au plan P passant par le point G et en donner la nature précise sans justification.

Annexe 1 de l'exercice 2 (à rendre avec la copie)



Annexe 2 de l'exercice 4 : Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
À rendre avec la copie.