# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

## SESSION 2019

# MATHÉMATIQUES

## Série S

**Enseignement Obligatoire – Coefficient 7**

**Durée de l'épreuve : 4 heures**

**L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.**

*Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.*
*Le candidat doit traiter tous les exercices.*
*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*
*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

**Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1 à 6.**

**Exercice 1 (5 points)** **Commun à tous les candidats**

Les probabilités demandées seront arrondies à 0,01.

Un commerçant vient de s'équiper d'un distributeur de glaces à l'italienne.

1. La durée, en mois, de fonctionnement sans panne de son distributeur de glaces à l'italienne est modélisée par une variable aléatoire $X$ qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ où $\lambda$ est un réel strictement positif (on rappelle que la fonction $f$ de densité de la loi exponentielle est donnée sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$).

   Le vendeur de l'appareil assure que la durée moyenne de fonctionnement sans panne de ce type de distributeur, c'est-à-dire l'espérance mathématique de $X$, est de 10 mois.

   **a.** Justifier que $\lambda = 0,1$.

   **b.** Calculer la probabilité que le distributeur de glaces à l'italienne n'ait connu aucune panne pendant les six premiers mois.

   **c.** Sachant que le distributeur n'a connu aucune panne pendant les six premiers mois, quelle est la probabilité qu'il n'en connaisse aucune jusqu'à la fin de la première année ? Justifier.

   **d.** Le commerçant remplacera son distributeur de glaces à l'italienne au bout d'un temps $t$, exprimé en mois, qui vérifie que la probabilité de l'événement $(X > t)$ est égale à 0,05. Déterminer la valeur de $t$ arrondie à l'entier.

2. La notice du distributeur de glaces précise que le distributeur fournit des glaces à l'italienne dont la masse est comprise entre 55 g et 65 g.
   On considère la variable aléatoire $M$ représentant la masse, en grammes, d'une glace distribuée. On admet que $M$ suit la loi normale d'espérance 60 et d'écart-type 2,5.

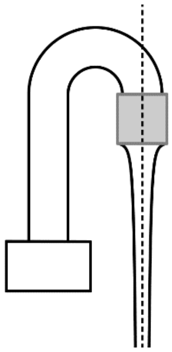
   **a.** Calculer la probabilité que la masse d'une glace à l'italienne choisie au hasard parmi celles distribuées soit comprise entre 55 g et 65 g.

   **b.** Déterminer la plus grande valeur de $m$, arrondie au gramme près, telle que la probabilité $P(M \geq m)$ soit supérieure ou égale à 0,99.

3. Le distributeur de glaces à l'italienne permet de choisir un seul des deux parfums : vanille ou fraise. Pour mieux gérer ses achats de matières premières, le commerçant fait l'hypothèse qu'il y aura en proportion deux acheteurs de glace à la vanille pour un acheteur de glace à la fraise.
   Le premier jour d'utilisation de son distributeur, il constate que sur 120 consommateurs, 65 ont choisi de la glace à la vanille.

   Pour quelle raison mathématique pourrait-il mettre en doute son hypothèse ? Justifier.

**Exercice 2 (5 points)** **Commun à tous les candidats**



L'écoulement de l'eau d'un robinet a un débit constant et modéré.

On s'intéresse en particulier à une partie du profil d'écoulement représentée en **annexe 1** par la courbe $C$ dans un repère orthonormé.

**Partie A**

On considère que la courbe $C$ donnée **en annexe 1** est la représentation graphique d'une fonction $f$ dérivable sur l'intervalle ]0 ; 1] qui respecte les trois conditions suivantes :

(H) : $f(1) = 0$ $\quad f'(1) = 0{,}25 \quad$ et $\quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$.

1. La fonction $f$ peut-elle être une fonction polynôme du second degré ? Pourquoi ?
2. Soit $g$ la fonction définie sur l'intervalle ]0 ; 1] par $g(x) = k \ln x$ .

   **a.** Déterminer le réel $k$ pour que la fonction $g$ respecte les trois conditions (H).

   **b.** La courbe représentative de la fonction $g$ coïncide-t-elle avec la courbe $C$ ? Pourquoi ?

3. Soit $h$ la fonction définie sur l'intervalle ]0 ; 1] par $h(x) = \frac{a}{x^4} + bx$ où $a$ et $b$ sont des réels. Déterminer $a$ et $b$ pour que la fonction $h$ respecte les trois conditions (H).

**Partie B**

On admet dans cette partie que la courbe $C$ est la représentation graphique d'une fonction $f$ continue, strictement croissante, définie et dérivable sur l'intervalle ]0 ; 1] d'expression :

$$f(x) = \frac{1}{20}\left(x - \frac{1}{x^4}\right).$$

1. Justifier que l'équation $f(x) = -5$ admet sur l'intervalle ]0 ; 1] une unique solution qui sera notée $\alpha$. Déterminer une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-2}$ près.
2. On admet que le volume d'eau en cm³, contenu dans les 5 premiers centimètres de l'écoulement, est donné par la formule : $V = \int_\alpha^1 \pi\, x^2 f'(x)\mathrm{d}x$.

   **a.** Soit $u$ la fonction dérivable sur ]0 ; 1] définie par $u(x) = \frac{1}{2x^2}$ . Déterminer sa fonction dérivée.

   **b.** Déterminer la valeur exacte de $V$. En utilisant la valeur approchée de $\alpha$ obtenue à la question 1, donner alors une valeur approchée de $V$.

**Exercice 3 (5 points)** **Commun à tous les candidats**

On considère la suite $(I_n)$ définie par $I_0 = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$ et pour tout entier naturel $n$ non nul $I_n = \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x$.

**1.** Montrer que $I_0 = \ln(2)$.

**2.** **a.** Calculer $I_0 - I_1$.
**b.** En déduire $I_1$.

**3.** **a.** Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$ .
**b.** Proposer un algorithme permettant de déterminer, pour un entier naturel $n$ donné, la valeur de $I_n$ .

**4.** Soit $n$ un entier naturel non nul.
On admet que si $x$ appartient à l'intervalle $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ alors $0 \leq \frac{x^n}{1-x} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ .
**a.** Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}$ .
**b.** En déduire la limite de la suite $(I_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ .

**5.** Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose $S_n = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \cdots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$.
**a.** Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, $S_n = I_0 - I_n$.
**b.** Déterminer la limite de $S_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 4 (5 points)** **Pour les candidats n'ayant pas suivi la spécialité**

Sur la figure donnée en **annexe 2 à rendre avec la copie** :

• ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que $\mathrm{AB} = 12$, $\mathrm{AD} = 18$ et $\mathrm{AE} = 6$.

• EBDG est un tétraèdre.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal d'origine A dans lequel les points B, D et E ont pour coordonnées respectives $\mathrm{B}(12\,;0\,;0)$, $\mathrm{D}(0\,;18\,;0)$ et $\mathrm{E}(0\,;0\,;6)$.

**1.** Démontrer que le plan (EBD) a pour équation cartésienne $3x + 2y + 6z - 36 = 0$.

**2. a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AG).

**b.** En déduire que la droite (AG) coupe le plan (EBD) en un point K de coordonnées $(4\,;6\,;2)$ .

**3.** La droite (AG) est-elle orthogonale au plan (EBD) ? Justifier.

**4. a.** Soit M le milieu du segment [ED]. Démontrer que les points B, K et M sont alignés.

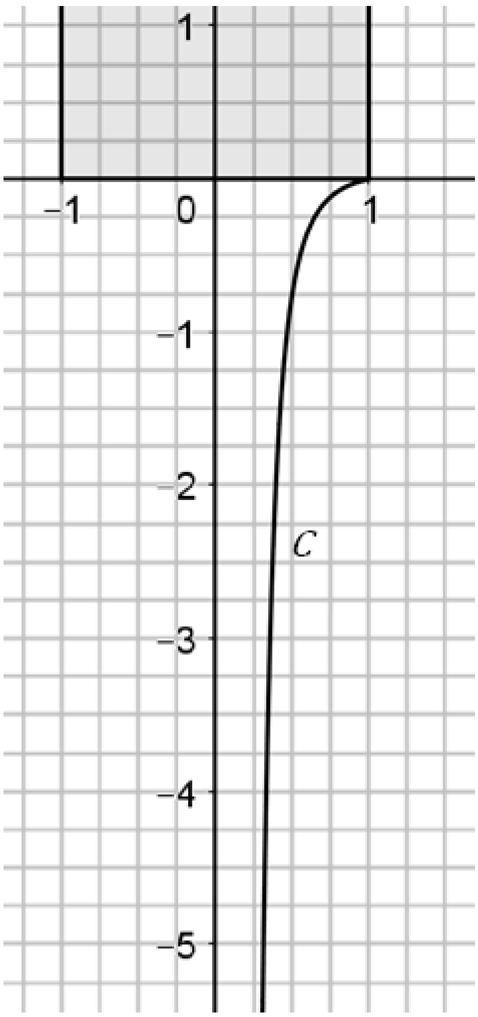
**b.** Construire alors le point K sur la figure donnée en **annexe 2 à rendre avec la copie**.

**5.** On note $P$ le plan parallèle au plan (ADE) passant par le point K.

**a.** Démontrer que le plan $P$ coupe le plan (EBD) selon une parallèle à la droite (ED).

**b.** Construire alors sur **l'annexe 2 à rendre avec la copie** l'intersection du plan $P$ et de la face EBD du tétraèdre EBDG.

***Annexe 1 (exercice 2) :***




***Annexe 2 (exercice 4 pour les candidats n'ayant pas suivi la spécialité) : à rendre avec la copie***