

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR GROUPEMENT A

MATHÉMATIQUES

Session 2019

Durée : 3 heures

SPÉCIALITÉ	Coefficient
Techniques physiques pour l'industrie et le laboratoire	3
Électrotechnique	2
Systèmes Photoniques	3

Matériel autorisé :

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le candidat n'utilise **qu'une seule machine sur la table**.

Toutefois, si celle-ci vient à connaître une défaillance, il peut la remplacer par une autre.

Les échanges de machine entre les candidats sont interdits.

**Dès que le sujet vous est remis assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.**

Il est rappelé que la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

MATHÉMATIQUES GROUPEMENT A	Session 2019
MATHÉMATIQUES	Code : 19MATGRA-1 Page : 1 / 7

EXERCICE 1 (12 points)

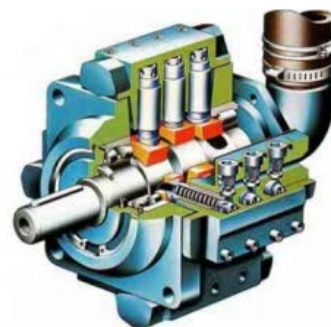
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A :

On étudie, dans cette partie, le débit d'une pompe à trois pistons alimentant un bac de stockage.

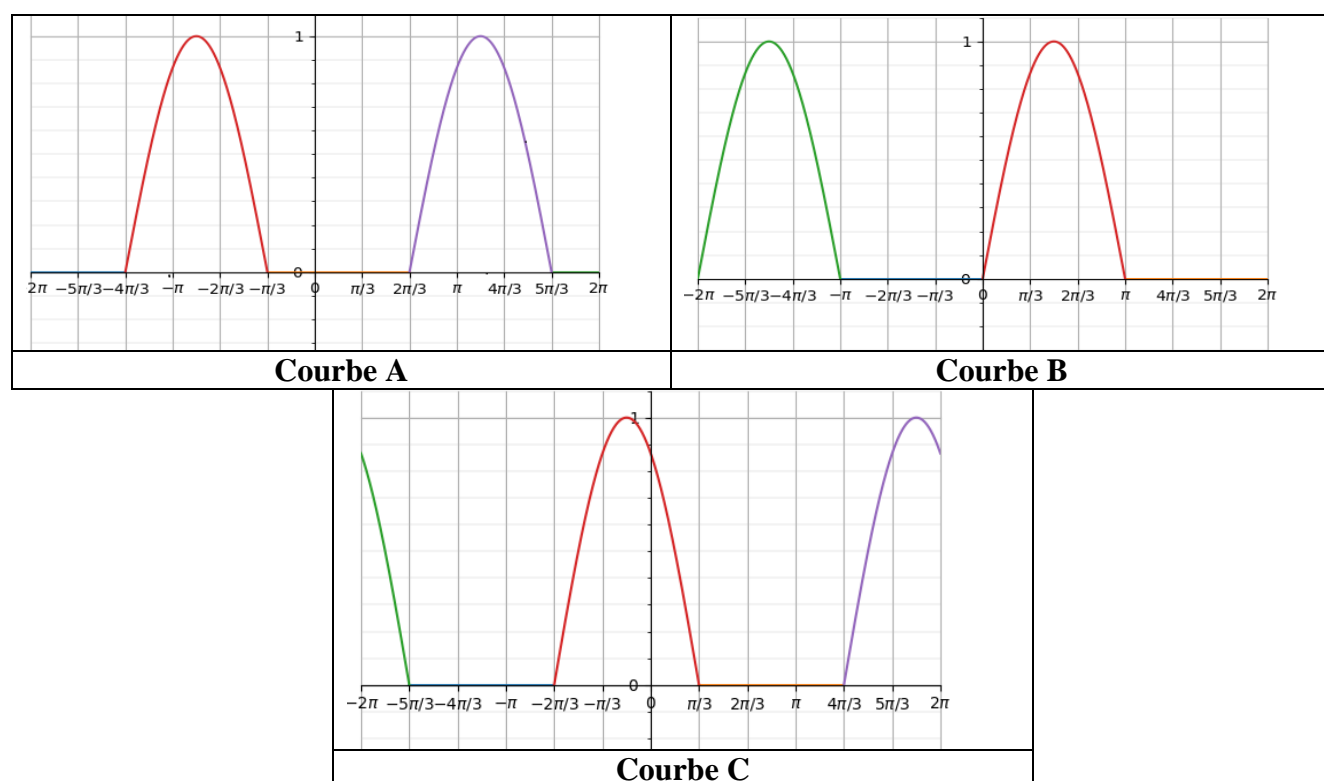
On note f la fonction périodique de période 2π définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ 0 & \text{si } \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$



1. Les débits q_1, q_2, q_3 de chacun des trois pistons (exprimés en litre par seconde) sont donnés, à l'instant t (exprimé en seconde), par : $q_1(t) = f(t)$; $q_2(t) = f\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$; $q_3(t) = f\left(t + \frac{4\pi}{3}\right)$.

Voici les représentations graphiques sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$ des fonctions q_1, q_2 et q_3 , dans le désordre.



Associer chaque courbe à la fonction, q_1, q_2 ou q_3 , qu'elle représente. Justifier brièvement.

2. Le débit, en litre par seconde, de la pompe à trois pistons est donné par :

$$Q(t) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t)$$

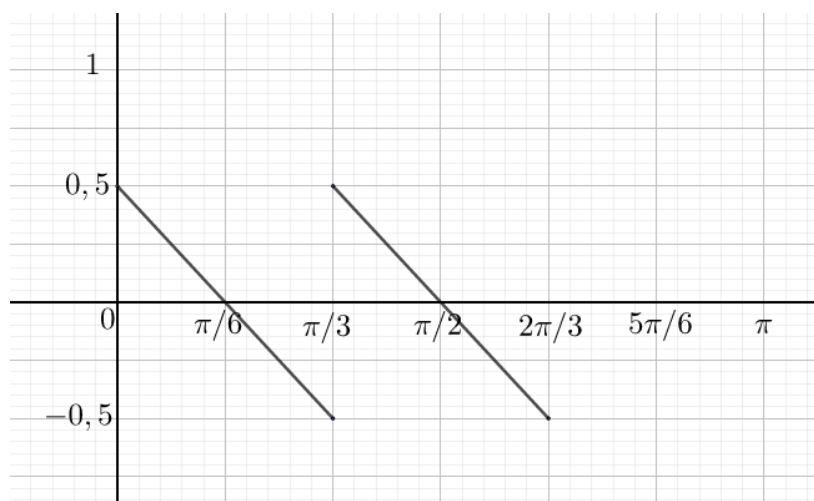
a) Calculer $Q(0)$ et $Q\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Écrire le détail des calculs.

On donne pour la suite : $Q\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$, $Q\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $Q\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Montrer que $Q\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) = Q(t)$ pour tout réel t . En déduire une période de Q .

c) On admet que Q est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{3}[\cup]\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}[$.

On donne ci-dessous la représentation graphique de **la fonction dérivée de Q** sur cet ensemble.



Recopier et compléter, à l'aide du graphique ci-dessus, le tableau de variations de la fonction Q sur l'intervalle $[0; \frac{2\pi}{3}]$. On y reportera les valeurs calculées ou données au a).

t	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$
Signe de $Q'(t)$					
Variations de Q					

3. On appelle taux d'irrégularité du débit de la pompe le nombre : $\theta = \frac{Q_M - Q_m}{Q_{moy}}$

où Q_M est le débit maximum de la pompe sur une période, Q_m est le débit minimum de la pompe sur une période et Q_{moy} est le débit moyen de la pompe.

On admet que : $Q_{moy} = \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$.

a) Montrer que $Q_{moy} = \frac{3}{\pi}$.

b) Calculer le taux d'irrégularité du débit de la pompe. Arrondir le résultat au centième.

Partie B

1. L'entreprise qui gère les bacs de stockage fait contrôler les pompes sur différents sites.

20% des pompes sont sous garantie.

Le technicien constate que :

- 1% des pompes sous garantie sont en panne.
- 10% des pompes qui ne sont plus sous garantie sont en panne.

On tire au hasard, dans le fichier de l'entreprise, la fiche d'une pompe dont l'entreprise assure le contrôle.

On considère les événements suivants :

G : « La pompe est sous garantie » et D : « La pompe est en panne »

On note \bar{G} et \bar{D} les événements contraires.

a) Construire un arbre pondéré qui modélise la situation.

b) Démontrer que : $P(D) = 0,082$.

c) Le technicien affirme que moins de 2% des pompes en panne sont sous garantie.

Le technicien a-t-il raison ?

2. On tire au hasard 50 fiches de pompes dans le fichier de l'entreprise. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 50 fiches, associe le nombre de fiches de pompes en panne.

On rappelle que la probabilité qu'une pompe soit en panne est 0,082.

a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Calculer la probabilité que, parmi les 50 fiches tirées, il y ait exactement deux fiches de pompes en panne. Arrondir au millième.

c) Calculer la probabilité que, parmi les 50 fiches tirées, il y ait plus de deux fiches de pompes en panne. Arrondir au millième.

d) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter ce résultat.

3. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque fiche tirée au hasard dans le fichier de l'entreprise, associe la durée de fonctionnement, en année, de la pompe correspondante. On admet que la variable aléatoire Y suit une loi normale de moyenne 12 et d'écart type 2.

On considère qu'une pompe est « rentable » si sa durée de fonctionnement est supérieure ou égale à 10 ans.

Quelle est la probabilité qu'une pompe, prise au hasard parmi celles que contrôle l'entreprise, **ne soit pas rentable** ? Arrondir au millième.

EXERCICE 2 (8 points)

On considère le bac de stockage cylindrique représenté ci-dessous.

À l'instant t , en seconde (s), on note $h(t)$ la hauteur d'eau, en mètre (m), dans le bac, $Q_e(t)$ le débit d'entrée, en m^3s^{-1} , et $Q_v(t)$ le débit de vidange, en m^3s^{-1} .

A l'instant $t = 0$, le bac est vide donc :

$$h(0) = 0.$$

La conservation de la matière permet d'écrire, pour tout réel $t \geq 0$:

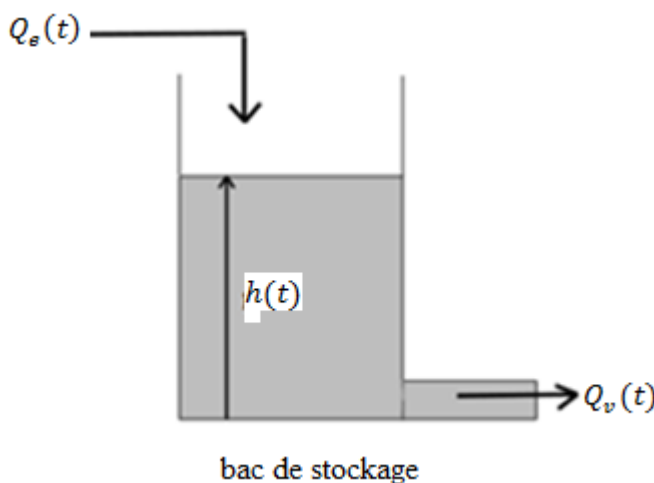
$$Q_e(t) = Sh'(t) + Q_v(t)$$

où S est l'aire de la base du bac, exprimée en m^2 , et h' la fonction dérivée de h .

Dans l'exercice, on a : $S = 8\text{m}^2$.

De plus on suppose, en faisant une approximation, que : $Q_v(t) = 2h(t)$.

On a donc : $8h'(t) + 2h(t) = Q_e(t)$



On veut que la hauteur d'eau $h(t)$ atteigne 10cm, soit 0,1m.

Pour cela, on agit sur le débit d'entrée $Q_e(t)$.

Partie A :

Dans cette partie, on suppose que pour réel $t \geq 0$: $Q_e(t) = 0,2$.

La fonction h est donc solution sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$8y' + 2y = 0,2 \quad (\text{E})$$

On rappelle le résultat suivant :

Équation différentielle	Solutions
$ay'(t) + by(t) = 0$ avec a et b des constantes réelles, $a \neq 0$.	$y: t \mapsto Ke^{-\frac{b}{a}t}$, avec $K \in \mathbb{R}$

1. a) Donner les solutions sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle : $8y' + 2y = 0$ (E₀)
b) Déterminer une solution particulière constante $y_0: t \mapsto c$, avec c constante réelle, de l'équation différentielle (E).
c) Donner les solutions sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle (E).

2. L'une des quatre expressions ci-dessous est celle de $h(t)$, pour tout réel $t \geq 0$.

Laquelle ? Justifier la réponse.

A : $h(t) = -0,1 e^{-0,25t} + 0,2$

C : $h(t) = -0,1 e^{-4t} + 0,1$

B : $h(t) = -0,1 e^{-0,25t} + 0,1$

D : $h(t) = -0,2 e^{-0,25t} + 0,1$

3. a) Quelle est la limite de $h(t)$ quand t tend vers $+\infty$? Justifier brièvement.
b) Estimer au bout de combien de temps $h(t)$ atteint 95% de 0,1m. Indiquer la démarche suivie.

Partie B :

On souhaite atteindre plus rapidement la hauteur de 10 cm d'eau dans le bac.

Pour cela, on modifie le débit d'entrée. On prend désormais pour tout réel $t \geq 0$:

$$Q_e(t) = \mathcal{U}(t) - 0,8 \mathcal{U}(t - 0,9)$$

où \mathcal{U} désigne la fonction échelon unité : $\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$.

h vérifie donc, pour tout réel $t \geq 0$: $8h'(t) + 2h(t) = \mathcal{U}(t) - 0,8 \mathcal{U}(t - 0,9)$ (E).

De plus, on rappelle que $h(0) = 0$

1. Représenter sur la copie $Q_e(t)$ en fonction de t , pour $t \geq 0$.

(On tracera un repère orthonormé. Sur chacun des axes, 10 cm représenteront une unité.)

2. On note $H: p \mapsto H(p)$ la transformée de Laplace de $h: t \mapsto h(t)$.

On rappelle les résultats suivants concernant la transformation de Laplace, où g est une fonction ayant une transformée de Laplace G :

Fonction	Transformée de Laplace
$t \mapsto \mathcal{U}(t)$	$p \mapsto \frac{1}{p}$
$t \mapsto e^{-at} \mathcal{U}(t), a \in \mathbb{R}$	$p \mapsto \frac{1}{p + a}$
$t \mapsto \mathcal{U}(t - a), a \in \mathbb{R}$	$p \mapsto \frac{1}{p} e^{-ap}$
$t \mapsto g(t - a) \mathcal{U}(t - a), a \in \mathbb{R}$	$p \mapsto G(p) e^{-ap}$
$t \mapsto g'(t) \mathcal{U}(t)$	$p \mapsto pG(p) - g(0^+)$

a) Écrire l'égalité obtenue en appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'égalité (E).

b) Montrer que : $H(p) = \frac{1 - 0,8e^{-0,9p}}{(2+8p)p}$.

3. On note : $A(p) = \frac{1}{(2+8p)p}$.

a) Vérifier que : $A(p) = \frac{0,5}{p} - \frac{4}{2+8p}$.

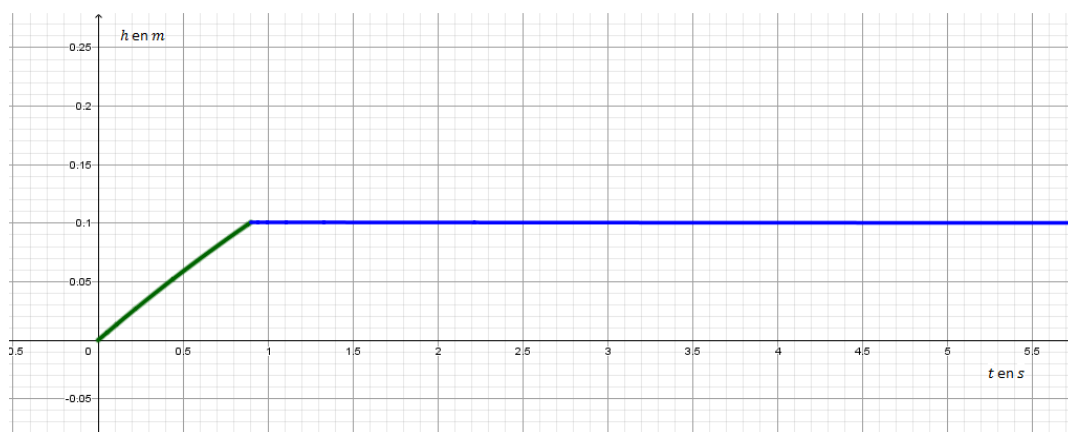
b) Comme $\frac{4}{2+8p} = \frac{0,5}{p+0,25}$, on a aussi : $A(p) = \frac{0,5}{p} - \frac{0,5}{p+0,25}$.

En déduire l'original $a(t)$ de $A(p)$.

c) On remarque que : $H(p) = A(p) \times (1 - 0,8e^{-0,9p}) = A(p) - 0,8A(p)e^{-0,9p}$.

Déterminer une expression de $h(t)$ pour tout réel $t \geq 0$.

4. La courbe représentative de la fonction h est tracée ci-dessous :



Estimer graphiquement le gain de temps réalisé pour atteindre la hauteur de 0,1 m dans le bac lorsque l'on remplace le débit d'entrée de $0,2 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ (étudié dans la partie A) par le débit d'entrée étudié dans la partie B.