BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 1 (6 points)

Commun à tous les candidats

Un parc d'attraction propose à son public un tout nouveau grand huit. Pour des raisons de sécurité, son accès n'est autorisé qu'aux personnes dont la taille est supérieure ou égale à 1,40 m et dont l'âge est compris entre 10 et 70 ans.
Des études statistiques sont menées pour évaluer l'affluence et la satisfaction des visiteurs pour ce manège.

On arrondira, si nécessaire, les probabilités à 10^{-4}.

1.a) La taille en centimètres d'un visiteur du parc, choisi au hasard, est modélisée par la variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance 165 et d'écart-type 20.
Quelle est la probabilité qu'un visiteur ait la taille requise pour accéder à ce grand huit ?

b) L'âge d'un visiteur du parc, choisi au hasard, est modélisé par la variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance 30 et d'écart-type 17.
Quelle est la probabilité qu'un visiteur ait l'âge requis pour accéder à ce grand huit ?

c) Les études menées permettent d'établir que 89 % des visiteurs ont la taille exigée, 87 % ont l'âge requis mais 8 % n'ont ni la taille, ni l'âge obligatoires. Quelle est alors la proportion des visiteurs vérifiant les conditions requises pour essayer la nouvelle attraction ?

2. Un sondage est réalisé à la sortie du grand huit et révèle que 25 % des personnes ont attendu moins de 30 min avant de pouvoir essayer le manège. Parmi elles, 95 % sont satisfaites de l'attraction.
En revanche, 22 % des personnes ayant attendu plus de 30 min ne sont pas satisfaites de l'attraction.
On choisit au hasard un visiteur à sa sortie du grand huit.
On note A l'événement « le visiteur a attendu plus de 30 min » et S l'événement « le visiteur est satisfait de l'attraction ».

a) Montrer que la probabilité qu'un visiteur soit satisfait de l'attraction vaut 0,8225.

b) Le directeur rencontre un visiteur insatisfait. Quelle est la probabilité que ce visiteur ait attendu moins de 30 min ?

3. Le directeur est soucieux de savoir si le temps d'attente, plus important les jours de grande affluence, remet en cause le taux de satisfaction des visiteurs. Pour cela, on interroge 200 personnes au hasard à la sortie du grand huit. Parmi elles, 46 se disent insatisfaites.
Le directeur peut-il être rassuré ?

EXERCICE 2 (6 points)

Commun à tous les candidats

*Les parties **A** et **B** sont indépendantes.*

Partie A

On s'intéresse à l'évolution au cours du temps d'une tumeur composée de cellules cancéreuses. On note $N(t)$ le nombre de cellules cancéreuses après un temps t exprimé en semaines et $N(0) = N_0$ le nombre de cellules cancéreuses au premier examen. Pour tout réel t positif ou nul, on admet qu'il existe un nombre a tel que

$$N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{at}.$$

1. Des cultures en laboratoire ont montré que le nombre de cellules de la tumeur double en 14 semaines.
   En déduire la valeur du paramètre a.
2. En arrondissant la valeur de a obtenue, on peut écrire pour tout réel $t \geqslant 0$,

   $$N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{0,05t}.$$

   La plus petite tumeur détectable au toucher contient environ 10^9 cellules. Lorsqu'une tumeur est détectable, on décide d'opérer le patient afin de la retirer. Or, après intervention, il est possible qu'il reste jusqu'à 10^4 cellules indétectables.
   En l'absence de suivi médical, au bout de combien de temps la tumeur pourrait-elle redevenir détectable au toucher ?

Partie B

Pour atténuer le risque de récidive, le médecin peut proposer de compléter l'opération par une chimiothérapie. Lors d'un traitement par chimiothérapie en intraveineuse, la concentration du médicament dans l'organisme, exprimée en μmol.L^{-1}, peut être modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction c définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par

$$c(t) = \frac{D}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{80}t}\right)$$

où

- D est un réel positif qui représente le débit d'écoulement du médicament dans la perfusion, exprimé en micromole par heure ;
- k est un réel positif qui représente la clairance du patient, exprimée en litre par heure.

La clairance traduit la capacité interne du patient à éliminer plus ou moins vite le médicament de son organisme. Elle est propre à chaque individu et est inconnue au début du traitement. Il est nécessaire de la déterminer afin que le médecin puisse adapter le traitement en ajustant le débit D.

1. **Détermination de la clairance**
   Afin de déterminer la clairance, on effectue les mesures suivantes. On règle le débit de la perfusion sur 112 μmol.h^{-1} ; au bout de 6 heures, on prélève un échantillon de sang du patient et on mesure la concentration du médicament : elle est égale à 6,8 μmol.L^{-1}.
   a) Justifier que la clairance k du patient est solution de l'équation $112\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}k}\right) - 6,8k = 0$.
   b) Démontrer que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   c) Donner une valeur approchée à 10^{-2} de cette solution. Interpréter ce résultat.

2. **Réglage du débit**

 a) Déterminer la limite ℓ de la fonction c en $+\infty$ en fonction du débit D et de la clairance k.

 b) La concentration du médicament dans le sang se rapproche rapidement de sa limite ℓ. Pour que le traitement soit efficace sans devenir toxique, cette concentration limite doit être de 16 μmol.L^{-1}.
 En déduire le débit D, à régler par le médecin, lorsque la clairance du patient est de 5,85 L.h^{-1}.

EXERCICE 3 (3 points)

Commun à tous les candidats

On rappelle que pour tout réel a et tout réel b, $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x + 2$.

1. Montrer que si le réel θ appartient à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{4}\,;\,\dfrac{3\pi}{4}\right[$, alors $\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) > 0$.
2. Soit M un point du plan complexe d'affixe z non nulle. On note $\rho = |z|$ le module de z et $\theta = \arg(z)$ un argument de z ; les nombres ρ et θ sont appelés coordonnées polaires du point M.
 Montrer que le point M appartient à la droite $\mathscr{D}$ si et seulement si ses coordonnées polaires sont liées par la relation :

$$\rho = \frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}\text{, avec } \theta \in \left]-\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right[\text{ et } \rho > 0.$$

3. Déterminer les coordonnées du point de la droite $\mathscr{D}$ le plus proche de l'origine O du repère.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

*Les parties **A** et **B** sont indépendantes.*

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

Partie A

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0,3 \\ u_{n+1} &= 0,9u_n(1-u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.
2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n et $1 - u_n$ appartiennent à l'intervalle $[0\,;1]$.
   a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,9u_n$.
   b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$.
   c) Déterminer la limite de la suite (u_n). Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?
3. Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.
   On souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme ci-dessous affiche la dernière année **avant** laquelle il reste au moins 30 tortues.
   Recopier et compléter l'algorithme afin qu'il satisfasse cette exigence.

Variables :	u est un réel
	n est un entier naturel
Traitement :	u prend la valeur 0,3
	n prend la valeur 0
	Tant que ... faire :
	|
	|
	|
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher ...

Partie B

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} v_{10} & = & 0,032 \\ v_{n+1} & = & 1,06v_n(1-v_n) \end{array}\right.$$

où pour tout entier naturel $n \geqslant 10$, v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011 puis de l'année 2012.
2. On admet que, dans ce modèle, la suite (v_n) est croissante et convergente. On appelle ℓ sa limite. Montrer que ℓ vérifie :
$$\ell = 1,06\ell(1-\ell).$$
3. La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction ?