BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES - Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures   Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES - Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures   Coefficient : 4

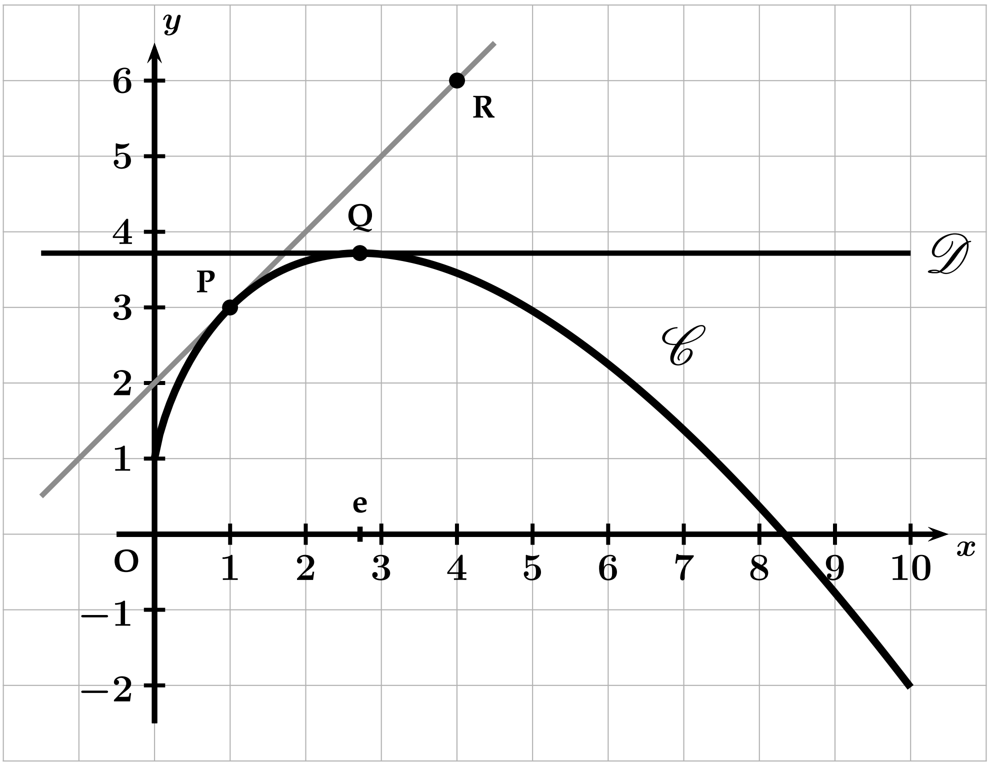
Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 10 pages numérotées de 1/10 à 10/10 dont une annexe, page 10/10, à remettre avec la copie.

EXERCICE 1 (5 points)

La courbe $\mathscr{C}$ tracée ci-dessous dans un repère orthonormé d'origine O est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;10]$.



On considère les points P $(1\,;3)$ et R $(4\,;6)$. Le point Q a pour abscisse e, avec $\mathrm{e} \simeq 2,718$.

Les points P et Q appartiennent à la courbe $\mathscr{C}$. La droite $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des abscisses et passe par le point Q.

La droite (PR) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point P et la droite $\mathscr{D}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point Q.

On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, les résultats seront donnés **à l'aide d'une lecture graphique et sans justification**.

1. Parmi les trois propositions ci-dessous, quelle est celle qui désigne l'équation de la droite (PR) ?

(a) $y = 2x + 1$ (b) $y = x + 2$ (c) $y = 2x + 2$

2. Donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

3. Une seule de ces trois propositions est exacte :

   (a) f est convexe sur l'intervalle $]0\,;10]$;

   (b) f est concave sur l'intervalle $]0\,;10]$;

   (c) f n'est ni convexe ni concave sur l'intervalle $]0\,;10]$.

   Laquelle ?

4. Encadrer l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ par deux entiers consécutifs.

Partie B

La courbe $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;10]$ par :

$$f(x) = -x\ln x + 2x + 1.$$

1. **a)** Calculer $f'(x)$.

   b) Démontrer que la fonction f admet un maximum sur l'intervalle $]0\,;10]$.

   c) Calculer la valeur exacte du maximum de la fonction f sur ce même intervalle.

2. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle $]0\,;10]$.

3. On admet que la fonction F définie par $F(x) = -\dfrac{x^2}{2}\ln x + \dfrac{5}{4}x^2 + x - 7$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;10]$.
   Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 2 (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;10]$ par :

$$f(x) = 4\,\mathrm{e}^{-0,5x+1} + x - 1$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1\,;10]$ et on note f' sa fonction dérivée.

On donne en annexe, page 10/10, à remettre avec la copie, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;10]$ dans un repère d'origine O.

Partie A

1. Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\,;10]$ on a : $f'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-0,5x+1} + 1$.

2. **a)** Montrer que sur l'intervalle $[1\,;10]$, l'équation $f'(x) = 0$ admet pour unique solution le nombre $\alpha = 2 + 2\ln 2$.

b) Placer sur le graphique fourni en annexe page 10 le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse α.

3. On admet que l'ensemble des solutions sur l'intervalle $[1\,;10]$ de l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$ est $[2 + 2\ln 2\,;10]$.

En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;10]$.

Partie B

L'entreprise « COQUE EN STOCK » fabrique et commercialise des coques pour téléphone portable.

Son usine est en mesure de produire entre 100 et 1 000 coques par jour.

La fonction f permet de modéliser le coût de production d'une coque en fonction du nombre de centaines de coques produites par jour. Ainsi, si x désigne le nombre de centaines de coques produites alors $f(x)$ représente le coût, en euros, de production d'une coque.

1. Calculer, au centime près, le coût de production d'une coque dans le cas de la fabrication de 500 coques par jour.

2. **a)** Montrer que produire 339 coques par jour permet de minimiser le coût unitaire de production.

b) En déduire le coût minimal de production d'une coque, en euros, au centime près.

Partie C

Le prix de vente d'une coque peut être modélisé par la fonction g définie sur l'intervalle $[1\,;10]$ par :

$$g(x) = -\frac{1}{4}x + 6$$

où x désigne le nombre de centaines de coques produites et $g(x)$ le prix de vente d'une coque en euros.

Estimer les quantités de coques à produire par jour afin d'assurer un bénéfice à l'entreprise.

EXERCICE 3 (5 points)

On considère la suite géométrique (u_n), de raison $0,9$ et de premier terme $u_0 = 50$.

1. **a)** Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il calcule et affiche le 25^{e} terme de cette suite, c'est-à-dire u_{24} :

Variables :	N est un entier naturel
	U est un nombre réel
Initialisation :	U prend la valeur ....
Traitement :	Pour N allant de 1 à 24
	U prend la valeur ....
	Fin Pour
Sortie :	Afficher U

b) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

c) Calculer u_{24} et donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près.

2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 0,01$.

3. On souhaite calculer la somme $S_{24} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{24}$.

Voici trois propositions d'algorithmes :

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
Variables :	**Variables :**	**Variables :**
N est un entier naturel	N est un entier naturel	N est un entier naturel
S est un nombre réel	S est un nombre réel	S est un nombre réel
Initialisation :	**Initialisation :**	**Initialisation :**
S prend la valeur 0	S prend la valeur 0	S prend la valeur 50
Traitement :	**Traitement :**	**Traitement :**
Pour N allant de 0 à 24	Pour N allant de 0 à 24	Pour N allant de 0 à 24
S prend la valeur $S+50\times 0,9^N$	S prend la valeur $50\times 0,9^N$	S prend la valeur $S+50\times 0,9^N$
Fin Pour	Fin Pour	Fin Pour
Sortie :	**Sortie :**	**Sortie :**
Afficher S	Afficher S	Afficher S

a) Un seul de ces algorithmes permet de calculer la somme S_{24} et de l'afficher.

Préciser lequel en justifiant la réponse.

b) Calculer la somme S_{24}.

On donnera une valeur approchée du résultat à l'unité près.

4. Pour tout entier naturel n, on note $S_n = u_0 + \ldots + u_n$.

On admet que la suite (S_n) est croissante et que pour tout entier naturel n, $S_n = 500 - 450 \times 0,9^n$.

a) Déterminer la limite de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Alex affirme que S_n peut dépasser 500 pour une valeur de l'entier n suffisamment grande.

Que pensez-vous de son affirmation ? Justifier la réponse.

EXERCICE 4 (5 points)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Une entreprise spécialisée dans la personnalisation des étuis de smartphones fait ses achats chez deux fournisseurs :

- un fournisseur A qui lui garantit 99 % d'étuis non défectueux ;
- un fournisseur B qui lui garantit 94 % d'étuis non défectueux.

On sait également que 80 % des étuis achetés par l'entreprise proviennent du fournisseur A (le reste provenant du fournisseur B).
On choisit au hasard un étui de smartphone et on considère les évènements suivants :

- A : « l'étui provient du fournisseur A » ;
- B : « l'étui provient du fournisseur B » ;
- D : « l'étui est défectueux ».

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.

2. Calculer la probabilité qu'un étui soit défectueux.

3. On choisit un étui au hasard et on constate qu'il est défectueux.
Montrer que la probabilité qu'il provienne du fournisseur B est égale à $0,6$.

Partie B

On rappelle que le fournisseur B garantit 94 % d'étuis non défectueux.
Un employé de l'entreprise prélève un échantillon de 400 étuis qui proviennent du fournisseur B.
Il constate que 350 de ces étuis ne sont pas défectueux.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des étuis défectueux dans un échantillon aléatoire de 400 étuis provenant du fournisseur B.
On donnera des valeurs approchées au millième des bornes de cet intervalle.

2. Faut-il informer le fournisseur B d'un problème ?

Partie C

Un étui est considéré comme conforme si son épaisseur est comprise entre 19,8 mm et 20,2 mm. Le fournisseur B souhaite qu'au moins 95 % des étuis produits soient conformes. Pour cela, il veut vérifier les réglages des machines de production.

On choisit un étui au hasard dans la production du fournisseur B. On note X la variable aléatoire associée à l'épaisseur (en mm) de l'étui. On admet que X suit une loi normale d'espérance 20 mm.

1. En observant les réglages des machines de production, le fournisseur B constate que l'écart-type de X est égal à $0,2$.
Justifier qu'il faut revoir les réglages des machines.

2. Déterminer une valeur de l'écart-type de X pour laquelle la probabilité qu'un étui soit conforme est environ égale à $0,95$.

ANNEXE

À remettre avec la copie