BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES - Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES - Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures Coefficient : 4

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7 .

EXERCICE 1 (4 points)

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

1. La solution exacte de l'équation $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{3}{10}$ est :

(a) $1,74$ (b) $\frac{\ln 10 - \ln 3}{\ln 2}$ (c) $-\frac{\ln 3}{\ln 5}$ (d) $0,6$

2. f est la fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$.

La valeur exacte de l'intégrale $\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ est :

(a) $4\,\mathrm{e}^4 - 4\,\mathrm{e}^{-4}$ (b) $4\left(\mathrm{e}^4 + \mathrm{e}^{-4}\right)$ (c) 0 (d) 1

3. f est la fonction définie pour tout x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = (2x+3)\ln x$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ on a :

(a) $f'(x) = \frac{2x+3}{x}$ (b) $f'(x) = \frac{2}{x}$

(c) $f'(x) = 2\ln x + \frac{3}{x} + 2$ (d) $f'(x) = 2\ln x + \frac{3}{x}$

4. Une grandeur a été augmentée de 5 % la première année, puis de 7 % la deuxième année.

Sur ces deux années, le pourcentage global d'augmentation est égal à :

(a) 12 % (b) 35 % (c) 0,35 % (d) 12,35 %

EXERCICE 2 (5 points)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

D'après le « bilan des examens du permis de conduire » pour l'année 2014 publié par le Ministère de l'Intérieur en novembre 2015, 20 % des personnes qui se sont présentées à l'épreuve pratique du permis de conduire avaient suivi la filière de l'apprentissage anticipé de la conduite (AAC). Parmi ces candidats, 75 % ont été reçus à l'examen. Pour les candidats n'ayant pas suivi la filière AAC, le taux de réussite à l'examen cette année là était seulement de 56, 6 %.
On choisit au hasard l'un des candidats à l'épreuve pratique du permis de conduire en 2014.
On considère les évènements suivants :

- A : « le candidat a suivi la filière AAC » ;
- R : « le candidat a été reçu à l'examen ».

On rappelle que si E et F sont deux évènements, la probabilité de l'évènement E est notée $P(E)$ et celle de E sachant F est notée $P_F(E)$. De plus $\overline{E}$ désigne l'évènement contraire de E.

1. **a)** Donner les probabilités $P(A)$, $P_A(R)$ et $P_{\overline{A}}(R)$.

b) Traduire la situation par un arbre pondéré.

2. **a)** Calculer la probabilité $P(A \cap R)$.

b) Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

3. Justifier que $P(R) = 0{,}602\,8$.

4. Sachant que le candidat a été reçu à l'examen, calculer la probabilité qu'il ait suivi la filière AAC.
On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près de cette probabilité.

Partie B

Un responsable d'auto-école affirme que pour l'année 2016, la probabilité d'être reçu à l'examen est égale à $0,62$.

Ayant des doutes sur cette affirmation, une association d'automobilistes décide d'interroger 400 candidats à l'examen parmi ceux de 2016. Il s'avère que 220 d'entre eux ont effectivement obtenu le permis de conduire.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de candidats reçus dans un échantillon aléatoire de 400 candidats.

2. Peut-on émettre des doutes sur l'affirmation du responsable de cette auto-école ?
Justifier votre réponse.

Partie C

Selon une enquête menée en 2013 par l'association « Prévention Routière », le coût moyen d'obtention du permis de conduire atteignait environ 1 500 €. On décide de modéliser le coût d'obtention du permis de conduire par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 1\,500$ et d'écart-type $\sigma = 410$.

1. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité que le coût du permis de conduire soit compris entre 1 090 € et 1 910 €.

2. Déterminer $P(X \leqslant 1155)$.
On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.

3. **a)** Par la méthode de votre choix, estimer la valeur du nombre réel a, arrondi à l'unité, vérifiant $P(X \geqslant a) = 0,2$.

b) Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

EXERCICE 3 (5 points)

En 2015, les forêts couvraient environ 4 000 millions d'hectares sur terre. On estime que, chaque année, cette surface diminue de 0,4 %. Cette perte est en partie compensée par le reboisement, naturel ou volontaire, qui est estimé à 7,2 millions d'hectares par an.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4\,000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,996\,u_n + 7,2$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, u_n permet d'obtenir une estimation de la surface mondiale de forêt, en millions d'hectares l'année 2015 + n.

2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il calcule et affiche la première année pour laquelle la surface totale de forêt couvre moins de 3 500 millions d'hectares sur terre.

Variables :	N est un entier naturel
	U est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à N la valeur 2 015
	Affecter à U la valeur 4 000
Traitement :	
Sortie :	Afficher N

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1\,800$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique puis préciser son premier terme et sa raison.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 2\,200 \times 0{,}996^n + 1\,800$.

c) Selon ce modèle et si le phénomène perdure, la surface des forêts sur terre va-t-elle finir par disparaître ? Justifier la réponse.

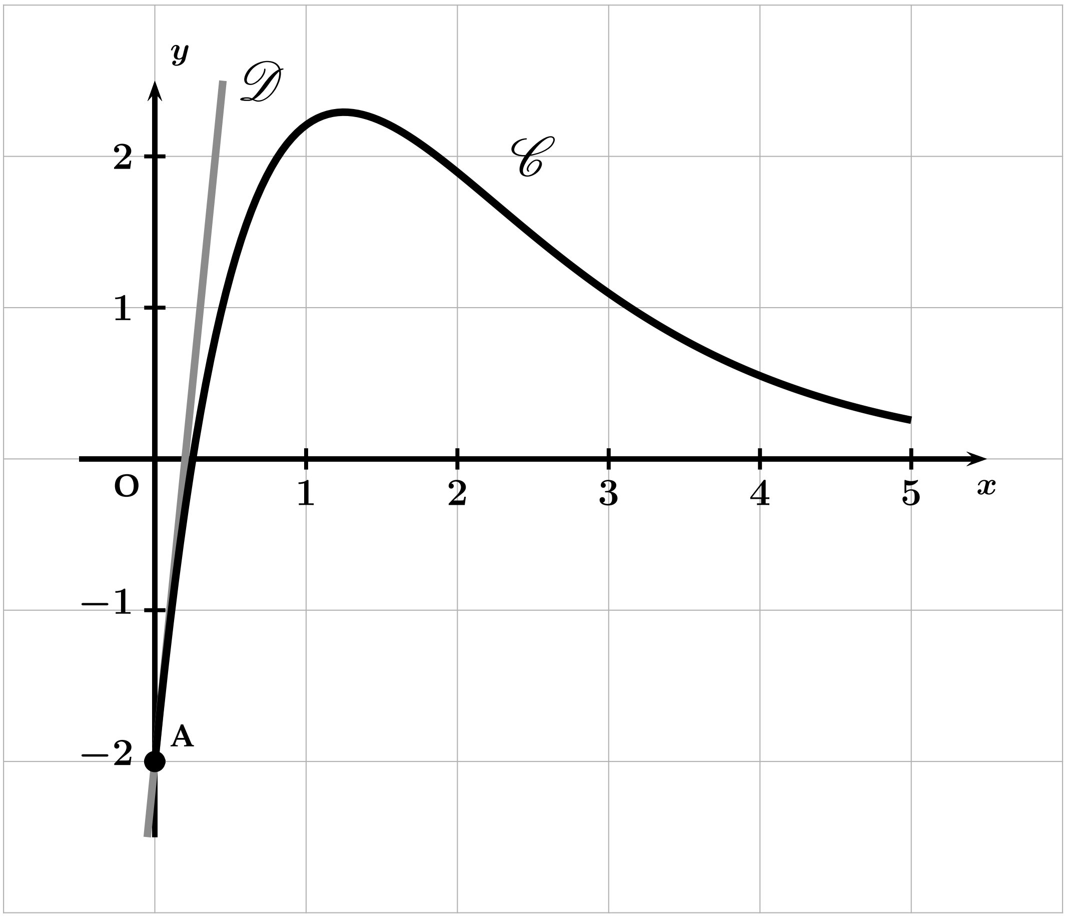
4. Une étude montre que, pour compenser le nombre d'arbres détruits ces dix dernières années, il faudrait planter 140 milliards d'arbres en 10 ans.
En 2016, on estime que le nombre d'arbres plantés par l'Organisation des Nations unies (ONU) est de 7,3 milliards.
On suppose que le nombre d'arbres plantés par l'ONU augmente chaque année de 10 %.
L'ONU peut-elle réussir à replanter 140 milliards d'arbres de 2016 à 2025 ? Justifier la réponse.

EXERCICE 4 (6 points)

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;5]$ par $f(x) = (ax-2)\,\mathrm{e}^{-x}$, où a est un nombre réel.

On admet dans tout l'exercice que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0\,;5]$.

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous dans un repère d'origine O.



Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ passent toutes les deux par le point A$(0\,;-2)$.

La droite $\mathscr{D}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A et admet pour équation $y = 10x-2$.

On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

1. Donner, à l'aide des informations ci-dessus et sans justifier, les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.

2. **a)** Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;5]$ on a :

$$f'(x) = (-ax+a+2)\,\mathrm{e}^{-x}$$

b) Déduire des questions précédentes que $a = 8$.

c) Donner l'expression de $f'(x)$ en fonction de x.

3. **a)** Préciser le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;5]$. On pourra faire un tableau.

   b) En déduire le tableau des variations de la fonction f sur ce même intervalle.

   c) Résoudre sur l'intervalle $[0\,;5]$ l'équation $f(x) = 0$.

4. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants :

1	$g(x) := (-8 * x + 10) * \exp(-x)$ $\rightarrow \boldsymbol{g(x) := (-8x + 10)\,\mathrm{e}^{-x}}$
2	Dériver $[g(x), x]$ $\rightarrow \boldsymbol{(8 * x - 18) * \exp(-x)}$
3	Résoudre $[(8 * x - 18) * \exp(-x) > 0, x]$ $\rightarrow \boldsymbol{x > 9/4}$

   En utilisant ces résultats :

   a) Donner l'expression de f'', fonction dérivée seconde de la fonction f.

   b) Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion dont on donnera la valeur exacte de l'abscisse.

5. Une entreprise fabrique des grille-pains. Après avoir fait une étude, son directeur constate que si l'entreprise fabrique chaque jour x milliers de grille-pains (où x est un nombre réel de l'intervalle $[1\,;5]$), alors le bénéfice quotidien est donné, en centaine de milliers d'euros, par la fonction f définie par :

$$f(x) = (8x - 2)\,\mathrm{e}^{-x}$$

   a) Quelle quantité de grille-pains l'entreprise doit-elle fabriquer afin de réaliser un bénéfice maximal ?

   b) Quel est alors la valeur de ce bénéfice maximal ?
   On donnera une valeur approchée du résultat à l'euro près.