

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

Session 2014

MATHÉMATIQUES

Séries STI2D et STL spécialité SPCL

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 4

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.
L'annexe en page 5/5 est à rendre avec la copie.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Une feuille de papier millimétré est distribuée avec le sujet.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche,
même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements
entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

EXERCICE 1 (4 points)

On considère les nombres complexes Z_1 et Z_2 :

$$Z_1 = \frac{3\sqrt{2}}{1+i} \text{ et } Z_2 = \frac{4i}{1+i\sqrt{3}}.$$

1. Écrire les nombres Z_1 et Z_2 sous forme algébrique et trigonométrique.
2. Placer les points A_1 et A_2 d'affixes respectives Z_1 et Z_2 dans le repère donné en **annexe** (page 5).
3. Calculer sous forme algébrique le produit $Z_1 \times Z_2$ et donner sa forme trigonométrique.
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

EXERCICE 2 (6 points)

Une entreprise informatique a réalisé en 2013 un bénéfice de 22 000 €. La direction de cette entreprise se fixe pour objectif une hausse annuelle de son bénéfice de 4,5%. Pour tout entier naturel n , on note b_n le bénéfice prévu pour l'année 2013 + n , on a donc $b_0 = 22\,000$.

Partie A

1. Calculer les bénéfices b_1 et b_2 espérés pour 2014 et 2015.
2. Montrer que (b_n) est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques.
3. Exprimer alors b_n en fonction de n .

Partie B

On considère l'algorithme ci-dessous :

<pre>N prend la valeur 0 B prend la valeur 22 000 Tant que B ≤ 40 000 N prend la valeur N + 1 B prend la valeur 1.045 * B Fin Tant que A prend la valeur N + 2013 Afficher A</pre>

1. Expliquer à quoi correspondent les variables N et B .
2. Exécuter cet algorithme et donner le dernier résultat affiché.
3. Expliquer à quoi correspond cette valeur.
4. La direction souhaite savoir à partir de quelle année le bénéfice de l'entreprise sera supérieur à 40 000 €.
 - (a) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation suivante :

$$22\,000 \times 1,045^x > 40\,000.$$

- (b) Quel lien existe-t-il entre le résultat de la question 2. de la partie B et l'ensemble des solutions de l'inéquation précédente ?

EXERCICE 3 (6 points)

Lorsque l'on consomme de l'alcool, le taux d'alcool dans le sang varie en fonction du temps écoulé depuis l'absorption. Ce taux est appelé « alcoolémie » et est mesuré en grammes par litre (g/L). Après l'absorption de trois verres d'alcool, l'alcoolémie d'une personne donnée, en fonction du temps (exprimé en heures), est modélisée par la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$f(t) = 2,5te^{-t}.$$

Partie A

1. Donner la valeur de l'alcoolémie de la personne considérée au bout de 2 heures.
2. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$, $f'(t) = 2,5(1 - t)e^{-t}$.
3. Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = 2,5e^{-t}$$

4. En remarquant que pour tout réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$ on a $f(t) = \frac{2,5t}{e^t}$, déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ et donner une interprétation géométrique de cette limite.
5. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
6. Quelle est l'alcoolémie la plus élevée pour la personne considérée ?

Partie B

1. Sur une feuille de papier millimétré, tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$. On prendra 2 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 10 cm pour unité sur l'axe des ordonnées.
2. En France, la législation autorise pour un conducteur une alcoolémie maximale de 0,5 g/L. Sachant que la personne a absorbé trois verres d'alcool à 12h, à partir de quelle heure pourra-t-elle reprendre la route pour effectuer sans s'arrêter un trajet d'une durée d'une heure ?
On utilisera la représentation graphique de la fonction f .

EXERCICE 4 (4 points)

Partie A Loi exponentielle et radioactivité

On modélise la durée de vie T (exprimée en jours) d'un élément radioactif par une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ . On rappelle que pour tout $t > 0$, $P(T \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$. Le Thorium 227 a une demi-vie de 18 jours, ce qui signifie que :

$$P(T \geq 18) = P(T \leq 18) = 0,5.$$

1. Montrer que pour tout $t > 0$, $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
2. Calculer la valeur du paramètre λ pour le Thorium 227.
On donnera le résultat arrondi à 10^{-4} .
3. On suppose que $\lambda = 0,04$.
Donner alors la durée de vie moyenne d'un atome de Thorium 227.

Partie B Loi normale et usinage

Une entreprise fabrique en grande quantité des pièces tubulaires destinées à l'industrie aéronautique. Le diamètre (exprimé en centimètres) d'une de ces pièces est modélisé par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance 3,65 et d'écart type 0,004.
Les résultats seront donnés à 10^{-3} près.

1. Une pièce est déclarée conforme lorsque son diamètre en centimètres est compris entre 3,645 et 3,655.
Calculer la probabilité qu'une pièce tubulaire de la production soit déclarée conforme.
2. Dans le cadre d'un fonctionnement correct de la chaîne de production, on admet que la proportion p de pièces conformes est 79%. On rappelle que l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95% de la fréquence de pièces conformes sur un échantillon de taille n est

$$I = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right].$$

On contrôle régulièrement la chaîne de production en prélevant des échantillons de 100 pièces. Lors d'un contrôle, on trouve 25 pièces défectueuses. Le responsable qualité doit-il prendre la décision d'effectuer des réglages sur la chaîne de production ?
Justifier la réponse.

Exerice 1

