BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

Série ES/L

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 5 (ES), 4 (L)**

ES : ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

L : ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

- *Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.*
- *Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*
- *Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*
- *Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

EXERCICE 1 (5 points) Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapportent, ni n'enlèvent aucun point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Partie A

À une roue de loterie dans une fête foraine, la probabilité annoncée de gagner une partie est égale à 0,12. Un joueur a la possibilité de jouer plusieurs parties.

1. Un joueur achète un carnet de tickets permettant de faire quatre parties. La valeur la plus approchée de la probabilité que le joueur gagne une seule fois sur les quatre parties est :

a) $0,3271$ **b)** $0,0002$ **c)** $0,4824$ **d)** $0,1215$

2. Après avoir gagné une partie, le joueur a la possibilité d'emporter son lot ou de le remettre en jeu. La probabilité qu'un joueur emporte son lot sachant qu'il a gagné est 0,8. La valeur la plus approchée de la probabilité qu'il parte avec son lot après une seule partie est :

a) $0,024$ **b)** $0,12$ **c)** $0,096$ **d)** $0,8$

On modélise le nombre de parties jouées par jour à cette loterie par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 150$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

3. Une valeur approchée à 10^{-3} près de $\mathrm{P}(140 < X < 160)$ est :

a) $0,954$ **b)** $0,683$ **c)** $0,997$ **d)** $0,841$

Partie B

4. la fonction f', dérivée de la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-x}$, a pour expression :

a) $(-x-1)\mathrm{e}^{-x}$ **b)** $(-2x-3)\mathrm{e}^{-x}$ **c)** $(2x+3)\mathrm{e}^{-x}$ **d)** $(-2x+1)\mathrm{e}^{-x}$

5. Soit un nombre réel strictement positif a . Parmi ces suites d'inégalités quelle est l'inégalité correcte ?

a) $a < \ln a < \mathrm{e}^a$
b) $\mathrm{e}^a < a < \ln a$
c) $\ln a < \mathrm{e}^a < a$
d) $\ln a < a < \mathrm{e}^a$

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L.

Dans un plan de lutte contre la pollution urbaine, une municipalité a décidé de réduire l'utilisation des voitures en ville en instaurant une taxe pour les automobiles circulant dans une zone du centre ville appelée ZTL (Zone à Trafic Limité).

En 2013, 20 000 voitures circulaient, en moyenne, chaque jour dans cette zone ZTL.

Partie A

Le premier objectif de la mairie était, qu'au bout d'un an, 30 % des automobilistes aient renoncé à circuler en zone ZTL.
Au bout d'un an, un sondage a été effectué auprès d'un échantillon de 800 automobilistes qui avaient l'habitude d'utiliser leur voiture en zone ZTL. Parmi ceux-ci, 168 ont répondu qu'ils avaient renoncé à utiliser leur voiture dans cette zone du centre-ville.

1. Déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance de 0,95 de la proportion d'automobilistes qui ont renoncé à utiliser leur voiture en zone ZTL. Arrondir les bornes de l'intervalle au millième.

2. La mairie peut-elle estimer avoir atteint son objectif ?

Partie B

L'objectif de la mairie est à présent de diviser par deux le nombre de voitures dans la zone ZTL en deux ans.

À partir de relevés effectués durant les premiers mois de l'année 2014, les services de la mairie ont estimé que l'évolution du nombre de voitures circulant en zone ZTL peut être modélisée par la suite (u_n) définie ci-dessous :

- $u_0 = 20\,000$
- pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,975\, u_n + 30$

où u_n représente le nombre moyen de voitures circulant chaque jour dans la zone ZTL, le n-ième mois, à compter du 1er janvier 2014.

1. Calculer u_1 et u_2.
Arrondir les résultats à l'unité.

2. Les services veulent déterminer le nombre de mois nécessaires pour atteindre l'objectif d'au plus 10 000 voitures en zone ZTL.

Recopier et compléter l'algorithme ci-contre afin qu'il affiche la réponse à cette question.

```
Variables :    N : nombre de mois
               U : nombre de voitures
Traitement :   Affecter à U la valeur 20 000
               Affecter à N la valeur 0
               Tant que U > 10 000 faire
                 | U ..................
                 | N........................
               Fin Tant que
Sortie :       Afficher N
```

3. Un membre du service propose d'utiliser la suite (v_n) définie, pour tout nombre entier naturel n, par $v_n = u_n - 1\,200$.
a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison et son premier terme.
b. Montrer que pour tout entier naturel n : $u_n = 18\,800 \times 0,975^n + 1\,200$.

4. Le nouvel objectif affiché par la mairie sera-t-il atteint ? Justifier la réponse.

EXERCICE 3 (5 points) Commun à tous les candidats

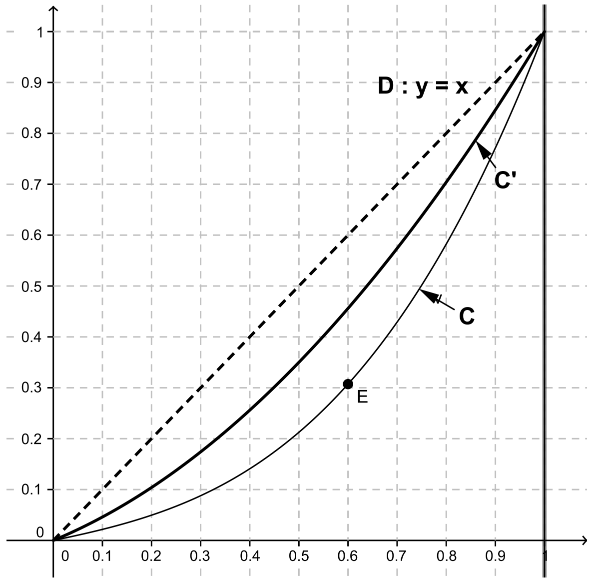
Étude de la répartition des salaires dans deux entreprises

Un cabinet d'audit a été chargé d'étudier la répartition des salaires dans deux filiales d'une entreprise, appelées A et B. Pour l'étude, les salaires sont classés par ordre croissant.

Le cabinet d'audit a modélisé la répartition de salaires par la fonction u pour la filiale A et par la fonction v pour la filiale B.

Les fonctions u et v sont définies sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :
$u(x) = 0,6x^2 + 0,4x$ et
$v(x) = 0,7x^3 + 0,1x^2 + 0,2x$

On a tracé ci-contre les courbes représentatives C et C' des fonctions u et v.



1. Déterminer la courbe représentative de la fonction u en justifiant la réponse.

2. Lorsque x représente un pourcentage de salariés, $u(x)$ et $v(x)$ représentent le pourcentage de la masse salariale que se partagent ces salariés dans leurs filiales respectives.

   Exemple : pour la courbe C, le point E(0,60 ; 0,3072) signifie que 60% des salariés ayant les plus bas salaires se partagent 30,72% de la masse salariale.

   a. Calculer le pourcentage de la masse salariale que se répartissent les 50% des salariés de la filiale A ayant les plus bas salaires.

   b. Pour les 50% des salariés ayant les plus bas salaires, laquelle des filiales, A ou B, distribue la plus grande part de la masse salariale ?

   c. Quelle filiale parait avoir une distribution des salaires la plus inégalitaire ?

3. Pour mesurer ces inégalités de salaires, on définit le coefficient de Gini associé à une fonction f modélisant la répartition des salaires, rangés en ordre croissant, par la formule :

$$c_f = 2\left(\frac{1}{2} - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right) .$$

   a. Montrer que $c_u = 0,2$.

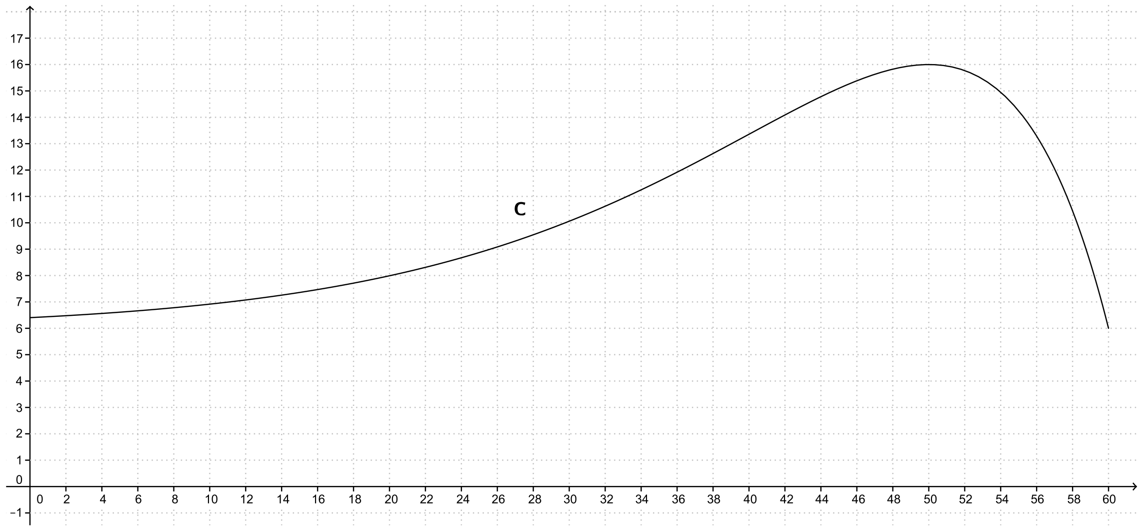
   b. En observant que $\dfrac{c_v}{2} = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 v(x)\mathrm{d}x$, donner une interprétation graphique de $\dfrac{c_v}{2}$ en termes d'aires.

   c. En déduire que c_v est compris entre 0 et 1.

   d. Justifier l'inégalité $c_u \leqslant c_v$.

EXERCICE 4 (5 points) Commun à tous les candidats

On considère une fonction P définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~60]$.
On donne, ci-dessous, la courbe représentative C de la fonction P.



Partie A

À partir d'une lecture graphique répondre aux questions qui suivent :

1. En argumentant la réponse, donner le signe de $P'(54)$, où P' est la fonction dérivée de P.

2. Donner un intervalle sur lequel la fonction P est convexe.

3. Donner, à l'unité près, les solutions de l'équation $P(x) = 10$.

4. On note A le nombre $\int_0^{10} P(x)\mathrm{d}x$; choisir l'encadrement qui convient pour A.

$0 < A < 60$ $\quad$ $60 < A < 70$ $\quad$ $6 < A < 7$ $\quad$ $10 < A < 11$

Partie B

La fonction P est définie sur l'intervalle $[0~;~60]$ par : $P(x) = 6 + (60 - x)\mathrm{e}^{0,1x-5}$.
À l'aide d'un logiciel de calcul formel on a obtenu les résultats suivants :

Actions	**Résultats**
`definir(P(x)=6+(60-x)*exp(0,1*x-5))`	`x ↦ 6+(60-x)*exp(0,1*x-5)`
`deriver(P(x),x)`	`(-0.1*x+5)exp(0.1*x-5)`
`deriver(deriver(P(x),x),x)`	`(-0.01*x+0.4)*exp(0.1*x-5)`

1. **a.** Étudier le signe de $P'(x)$ sur l'intervalle $[0~;~60]$ où P' est la fonction dérivée de P.
b. En déduire les variations de la fonction P sur l'intervalle $[0~;~60]$ et vérifier que la fonction P admet, sur cet intervalle, un maximum valant 16.

2. Montrer que l'équation $P(x) = 10$ a une solution unique x_0 sur l'intervalle $[0~;~40]$. Donner une valeur approchée de x_0 à 0,1 près.

3. En exploitant un des résultats donnés par le logiciel de calcul formel, étudier la convexité de la fonction P.