BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

Session 2016

MATHÉMATIQUES

Série : SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LABORATOIRE

Spécialité : BIOTECHNOLOGIES

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 4

Calculatrice autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Le candidat doit traiter les quatre exercices. Il est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Les annexes page 7/7 sont à rendre avec la copie.

EXERCICE 1 (4 points)

Dans cet exercice, on s'intéresse au taux de cholestérol LDL de la population d'adultes d'un pays.

On note X la variable aléatoire qui, à un adulte de cette population, associe son taux de cholestérol LDL, exprimé en grammes par litre.

On admet que X suit la loi normale d'espérance 1,27 et d'écart type 0,39.

1. a) Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité qu'un adulte, choisi au hasard dans cette population, ait un taux de cholestérol LDL compris entre 1 et 1,6 gramme par litre.
   b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité qu'un adulte, choisi au hasard dans cette population, ait un taux de cholestérol LDL supérieur à 1,9 gramme par litre.

2. Dans la population étudiée, 28 % des adultes souffrent d'hypercholestérolémie LDL (ils ont un taux de cholestérol LDL trop élevé).

   a) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence d'adultes souffrant d'hypercholestérolémie LDL, dans un échantillon de 300 adultes choisis au hasard dans la population étudiée. On arrondira les bornes de l'intervalle à 10^{-3}.

   b) Les médecins d'une ville de ce pays s'interrogent sur la proportion d'adultes souffrant d'hypercholestérolémie LDL dans leur ville. Ils disposent d'un groupe de 300 adultes pris au hasard parmi les adultes de la ville. Ils constatent que 96 d'entre eux souffrent d'hypercholestérolémie LDL.

      En utilisant l'intervalle de fluctuation précédent, peut-on dire, que la proportion d'adultes souffrant d'hypercholestérolémie LDL dans cette ville est significativement plus élevée que dans l'ensemble de la population du pays ? Justifier la réponse.

3. Deux laboratoires fabriquent un médicament anti-cholestérol LDL.

   Le médicament du laboratoire A est testé sur un échantillon de 1000 adultes et s'avère efficace pour 870 d'entre eux.
   Le médicament du laboratoire B est testé sur un échantillon de 800 adultes et s'avère efficace pour 720 d'entre eux.

   a) Un intervalle de confiance à 95 % de la proportion p_A d'adultes pour lesquels le médicament du laboratoire A est efficace, est $[0{,}849 ; 0{,}891]$.

      Déterminer un intervalle de confiance à 95 % de la proportion p_B d'adultes pour lesquels le médicament du laboratoire B est efficace.

   b) Ces résultats permettent-ils de considérer qu'il y a une différence significative entre ces deux médicaments en termes d'efficacité ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 (5 points)

Pierre possède une piscine naturelle de 80 000 litres d'eau. Des plantes épuratives jouent le rôle de filtration naturelle. Afin d'améliorer l'oxygénation de l'eau, Pierre décide de recycler en permanence une partie de l'eau de la piscine en la remplaçant par l'eau d'un puits voisin. Malheureusement, Pierre ne sait pas que l'eau du puits, captée par une pompe, est contaminée par des germes.

Avant la mise en route de la pompe, l'eau de la piscine n'est contaminée par aucun germe. La quantité d'eau contaminée au cours du temps est modélisée par une fonction f . Lorsque t représente le temps écoulé, en heures, depuis la mise en route de la pompe, $f(t)$ représente la quantité, en litres, d'eau contaminée venant du puits au bout de t heures de pompage.

On admet que la fonction f, définie sur $[0,+\infty[$, est solution de l'équation différentielle :

$$y' + 0{,}00625y = 0.$$

1. a) Donner les solutions de cette équation différentielle sur $[0;+\infty[$.

   b) Sachant que $f(0) = 0$, déterminer une expression de $f(t)$ pour tout réel t de $[0,+\infty[$.

Dans les questions suivantes, on admet que pour tout réel t de $[0,+\infty[$, on a :

$$f(t) = 4800 - 4800\,\mathrm{e}^{-0{,}00625t}.$$

2. Calculer, en litres, la quantité d'eau contaminée venant du puits au bout de 72 heures. Le résultat sera arrondi à l'unité.

3. a) Calculer $f'(t)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f. En déduire le tableau de variations de la fonction f (on admet que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 4800$).

   b) Ce sens de variation de la fonction f déterminé est-il cohérent avec la situation concrète étudiée. Pourquoi ?

4. La piscine devient dangereuse pour la peau lorsque la quantité d'eau contaminée dépasse 6 % du volume d'eau de la piscine.
   Cette piscine peut-elle être dangereuse pour la peau ? Justifier.

5. La piscine devient impropre à la baignade lorsque la quantité d'eau contaminée dépasse 3 % du volume d'eau de la piscine.
   Déterminer, à l'heure près, au bout de combien de temps l'eau de la piscine deviendra impropre à la baignade.

EXERCICE 3 (5 points)

En 2013, la production française de déchets d'équipements électriques et électroniques (déchets EEE) s'élève à 1,55 million de tonnes. *(Source : Agence de l'Environnement et de la Maîtrise de l'Énergie.)*

1. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? On justifiera la réponse.
   « En 2013, la production française de déchets EEE par seconde est de 49 kg, au kilogramme près. »

   On s'intéresse à la production française, exprimée en millions de tonnes, de déchets EEE par an à partir de 2013. On estime qu'à compter de l'année 2013, la production française de déchets EEE augmente de 3 % par an. Ainsi, la situation peut être modélisée par une suite géométrique (u_n), où pour tout entier naturel n, u_n est une estimation de la production française de déchets EEE (exprimée en millions de tonnes) en $2013+n$.

2. a) Préciser la raison et le premier terme de la suite (u_n).
   b) Exprimer u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

3. Calculer la production française de déchets EEE en 2020. Le résultat sera arrondi à 0,01 million de tonnes.

4. En quelle année la production française de déchets EEE dépassera-t-elle 2 millions de tonnes ? Justifier la réponse.

5. On considère l'algorithme suivant :

> **Variables :**
> n entier naturel
> u et S réels
> **Initialisation :**
> Affecter à u la valeur 1,55
> Affecter à S la valeur 1,55
> **Traitement :**
> Pour n allant de 1 à 5
>   Affecter à u la valeur $1{,}03\times u$
>   Affecter à S la valeur $S+u$
> Fin Pour
> **Sortie**
> Afficher S

a) Indiquer dans le tableau les valeurs successives prises par les variables u et S lors du déroulement de l'algorithme (les résultats seront arrondis à 10^{-3}) :

n	0	1	2	3	4	5
u	1,55	1,597				
S	1,55	3,147				

b) Quel résultat sera affiché à l'issue de cet algorithme ? Interpréter concrètement cette valeur en termes de production française de déchets EEE.

EXERCICE 4 (6 points)

Une étude vise à quantifier la probabilité y_i, pour une personne donnée, de développer une maladie après la consommation d'une portion de repas à base d'œuf ou de poulet selon le nombre n_i de bactéries *Salmonella* qui y sont présentes. Les résultats de cette étude sont donnés dans le tableau suivant :

n_i	15	50	400	6 300	$2{,}5\cdot10^4$	$6{,}3\cdot10^5$	$2\cdot10^6$	$4\cdot10^8$	$6{,}3\cdot10^9$
y_i	0,02	0,15	0,27	0,63	0,71	0,84	0,92	1	1

(Source : *Organisation des Nations Unies pour l'alimentation et l'agriculture*.)

On rappelle que log désigne le logarithme décimal.

1. a) On pose $x_i = \log(n_i)$. Compléter le tableau de valeurs fourni en annexe 1 (on arrondira les résultats au dixième).

   b) Calculer les coordonnées, à 10^{-1} près, du point moyen *G* du nuage de points $M_i\left(x_i\,, y_i\right)$ et placer le point *G* sur le graphique de l'annexe 2.

2. On note (*D*) la droite d'ajustement de *y* en *x* obtenue par la méthode des moindres carrés.

   a) À l'aide de la calculatrice, donner l'équation de la droite (*D*) sous la forme $y = ax + b$, les réels *a* et *b* étant arrondis au millième.

   b) Construire la droite (*D*) sur le graphique de l'annexe 2.

   c) En utilisant ce modèle d'ajustement, estimer, à 10^{-2} près, la probabilité de développer une maladie après la consommation d'une portion de repas à base d'œuf ou de poulet dans lesquels le nombre de bactéries *Salmonella* est de 4000.

3. Dans cette question, on utilise un nouveau modèle d'ajustement.

Pour un nombre *n* de bactéries donné, on pose $x = \log n$ et, dans ce nouveau modèle, on note $f(x)$ la probabilité, pour une personne donnée, de développer une maladie après la consommation d'une portion de repas à base d'œuf ou de poulet selon le nombre *n* de bactéries *Salmonella* qui y sont présentes.

On suppose que pour tout $x \in [0;+\infty[$, on a : $f(x) = \dfrac{1}{1+34{,}8\,\mathrm{e}^{-x}}$.

a) On détermine la fonction dérivée de la fonction *f* grâce à un logiciel de calcul formel. On a obtenu l'affichage suivant :

```
1  f(x):=1/(1+34.8*e^(-x))
```

$$x \;\text{->}\; \frac{1}{1+34.8*\exp(-x)}$$

```
2  deriver(f(x))
```

$$34.8*\frac{\exp(-x)}{(34.8*\exp(-x)+1)^2}$$

En déduire le sens de variation de la fonction *f*.

b) Tracer la courbe représentative de la fonction *f* dans le repère de l'annexe 2.

c) En utilisant ce nouveau modèle, déterminer la probabilité de développer une maladie après la consommation d'une portion de repas à base d'œuf ou de poulet dans lesquels le nombre de bactéries *Salmonella* est de 4000. On en donnera la valeur arrondie au centième.

d) En utilisant ce nouveau modèle, estimer le nombre de bactéries *Salmonella* d'une portion de repas à base d'œuf ou de poulet telle que la probabilité d'être malade soit égale à 0,75. On expliquera la démarche utilisée.

ANNEXES À JOINDRE A LA COPIE

Annexe 1 (exercice 4)

n_i	15	50	400	6 300	$2{,}5\cdot 10^4$	$6{,}3\cdot 10^5$	$2\cdot 10^6$	$4\cdot 10^8$	$6{,}3\cdot 10^9$
$x_i=\log(n_i)$	1,2	1,7							
y_i	0,02	0,15	0,27	0,63	0,71	0,84	0,92	1	1

Annexe 2 (exercice 4)