

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2013

## MATHÉMATIQUES

Série ES

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7 (ES)

**ES : ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE**

**Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,  
conformément à la réglementation en vigueur.**

*Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.*

*Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

*Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.*

## EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.*

*Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est correcte.*

*Une réponse juste rapporte 1 point ; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

*Reporter sur le sujet le numéro de la question ainsi que la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbf{R}$  par :  $f(x) = xe^{-x}$ .

1. L'image  $f(\ln 2)$  de  $\ln 2$  par  $f$  est égale à :

- a)  $\ln 2$
- b)  $-2 \ln 2$
- c)  $2 \ln 2$
- d)  $\frac{1}{2} \ln 2$

2.  $f$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$  et on note  $f'$  sa fonction dérivée. Alors, pour tout nombre réel  $x$ , on a :

- a)  $f'(x) = e^{-x}$
- b)  $f'(x) = -e^{-x}$
- c)  $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$
- d)  $f'(x) = (1 + x)e^{-x}$

3. L'équation réduite de la tangente à la courbe de la fonction  $f$  au point d'abscisse 0 est :

- a)  $y = 2x$
- b)  $y = x - 1$
- c)  $y = x$
- d)  $y = 2x - 1$

4. La fonction  $f$  est :

- a) concave sur  $[0 ; 1]$
- b) concave sur  $[0 ; +\infty[$
- c) convexe sur  $[0 ; +\infty[$
- d) convexe sur  $[0 ; 1]$

5. L'intégrale  $\int_0^1 f(x)dx$  est égale à :

- a)  $e - 5$
- b)  $5$
- c)  $\frac{e-2}{e}$
- d)  $1$

## EXERCICE 2

(5 points)

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

*Les parties A et B sont indépendantes*

Alors qu'une entreprise A possédait le monopole de l'accès à internet des particuliers, une entreprise concurrente B est autorisée à s'implanter.

Lors de l'ouverture au public en 2010 des services du fournisseur d'accès B, l'entreprise A possède 90% du marché et l'entreprise B possède le reste du marché.

Dans cet exercice, on suppose que chaque année, chaque internaute est client d'une seule entreprise A ou B.

On observe à partir de 2010 que chaque année, 15% des clients de l'entreprise A deviennent des clients de l'entreprise B, et 10 % des clients de l'entreprise B deviennent des clients de l'entreprise A.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $a_n$  la probabilité qu'un internaute de ce pays, choisi au hasard, ait son accès à internet fourni par l'entreprise A pour l'année  $2010 + n$ , et  $b_n$  la probabilité pour que son fournisseur d'accès en  $2010 + n$  soit l'entreprise B.

On note  $P_n = (a_n \ b_n)$  la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année  $2010 + n$  et on a ainsi  $a_0 = 0,9$  et  $b_0 = 0,1$ .

### PARTIE A

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.
2.
  - a) Déterminer la matrice de transition  $M$  de ce graphe.
  - b) Montrer qu'en 2013, l'état probabiliste est environ  $(0,61 \ 0,39)$ .
  - c) Déterminer l'état stable  $P = (a \ b)$  de la répartition des clients des entreprises A et B. Interpréter le résultat.

### PARTIE B

Lors d'une campagne de marketing l'entreprise B distribue un stylo ou un porte-clés ; il en coûte à l'entreprise 0,80 € par stylo et 1,20 € par porte-clés distribué.

A la fin de la journée l'entreprise a distribué 550 objets et cela lui a coûté 540 €.

On cherche le nombre  $s$  de stylos et le nombre  $c$  de porte-clés distribués.

1. Écrire un système traduisant cette situation.
2. Montrer que le système précédent est équivalent à  $R \times X = T$  où  $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,8 & 1,2 \end{pmatrix}$  et  $X$  et  $T$  sont des matrices que l'on précisera.
3. Résoudre le système à l'aide de la calculatrice. Interpréter le résultat.

### EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

La production des perles de culture de Tahiti est une activité économique importante pour la Polynésie Française.

Les montants réalisés à l'exportation des produits perliers de 2008 à 2011 sont donnés dans le tableau suivant, en milliers d'euros :

Années	2008	2009	2010	2011
Valeurs brutes des produits perliers (en milliers d'euros)	81 295	66 052	64 690	63 182

Source : ISPF (Institut de Statistiques de Polynésie Française)

1. Montrer que le taux d'évolution annuel moyen des montants à l'exportation des produits perliers de Polynésie entre 2008 et 2011 est  $-8,06\%$  arrondi au centième.

On admet pour la suite de l'exercice, que la production continuera à baisser de  $8\%$  par an à partir de 2011.

2. On considère l'algorithme suivant :

**Entrée**

Saisir un nombre positif P

**Traitement :**

Affecter la valeur 0 à la variable N {initialisation}

Affecter la valeur 63 182 à U {initialisation}

Tant que  $U > P$

Affecter la valeur  $N + 1$  à N

Affecter la valeur  $0,92 \times U$  à U

Fin de Tant que

Affecter la valeur  $N + 2011$  à N

**Sortie**

Afficher N

Si on saisit  $P = 50\,000$  en entrée, qu'obtient-on en sortie par cet algorithme ? Interpréter ce résultat dans le contexte de la production de perles.

3. Pour prévoir les montants réalisés à l'exportation des perles de Tahiti, on modélise la situation par une suite  $(u_n)$ . On note  $u_0$  le montant en 2011, en milliers d'euros, et  $u_n$  le montant en  $2011 + n$ , en milliers d'euros. On a donc  $u_0 = 63\,182$  et on suppose que la valeur baisse tous les ans de  $8\%$ .
- a) Montrer que  $(u_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.
- b) Exprimer, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- c) Avec ce modèle, quel montant peut-on prévoir pour l'exportation des produits perliers de Polynésie Française en 2016 ? On arrondira le résultat au millier d'euros.
4. Calculer le montant cumulé des produits perliers exportés que l'on peut prévoir avec ce modèle à partir de 2011 (comprise) jusqu'à 2020 (comprise). On donnera une valeur approchée au millier d'euros.

## EXERCICE 4 (5 points)

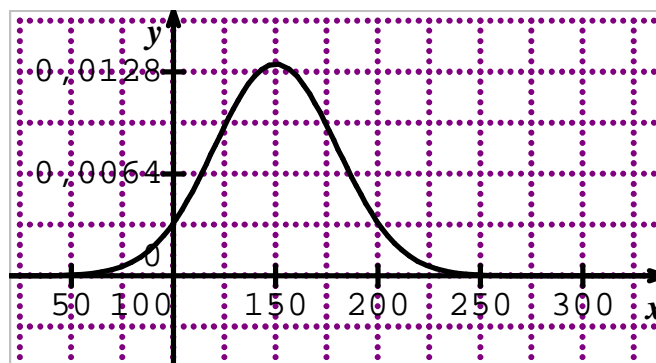
Commun à tous les candidats

On s'intéresse à une espèce de poissons présente dans deux zones différentes (zone 1 et zone 2) de la planète.

### A. Étude de la zone 1

On note  $X$  la variable aléatoire qui à chaque poisson observé dans la zone 1 associe sa taille en cm.

Une étude statistique sur ces poissons de la zone 1 a montré que la variable aléatoire  $X$  suit une loi normale de moyenne  $\mu$  et d'écart type  $\sigma = 30$ . La courbe de la densité de probabilité associée à  $X$  est représentée ci-contre.



1. Par lecture graphique, donner la valeur de  $\mu$ .
2. On pêche un de ces poissons dans la zone 1. Donner la probabilité, arrondie à  $10^{-2}$ , d'avoir un poisson dont la taille est comprise entre 150 cm et 210 cm.
3. Un poisson de cette espèce de la zone 1 est considéré comme adulte quand il mesure plus de 120 cm.

On pêche un poisson de l'espèce considérée dans la zone 1. Donner la probabilité, arrondie à  $10^{-2}$ , de pêcher un poisson adulte.

4. On considère un nombre  $k$  strictement plus grand que la valeur moyenne  $\mu$ .  
Est-il vrai que  $P(X < k) < 0,5$  ? Justifier.

### B. Étude de la zone 2

1. Certains poissons de la zone 2 sont atteints d'une maladie. On prélève de façon aléatoire un échantillon de 50 poissons de cette espèce dans la zone 2 et on constate que 15 poissons sont malades.
  - a) Calculer la fréquence  $f$  de poissons malades dans l'échantillon.
  - b) Déterminer un intervalle de confiance, au niveau de 95 %, de la proportion  $p$  de poissons malades dans toute la zone 2. On arrondira les bornes au millième.
2. Soit  $Y$  la variable aléatoire qui, à chaque poisson de l'espèce considérée de la zone 2, associe sa taille en cm. On admet que la variable aléatoire  $Y$  suit la loi normale de moyenne  $\mu' = 205$  et d'écart type  $\sigma' = 40$ .

En comparant avec le graphique de la zone 1 donné à la question 1 qui représente une loi normale d'écart type  $\sigma = 30$ , dire laquelle des trois courbes ci-dessous représente la densité de probabilité de la variable aléatoire  $Y$ . Justifier la réponse.

