

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SERVICES INFORMATIQUES

AUX ORGANISATIONS

SESSION 2013

SUJET

ÉPREUVE E2 – MATHÉMATIQUES POUR L'INFORMATIQUE

Sous épreuve E21 - Mathématiques
Épreuve obligatoire

Durée : 2 heures

coefficient : 2

Calculatrice autorisée, conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 :

« Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante, sont autorisées.

Les échanges de machines entre candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices sont interdits ».

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Il comprend 5 pages numérotées de la page 1/5 à la page 5/5.

Exercice 1 (5 points)

Un professeur de BTS SIO souhaite sélectionner un langage de programmation.
Pour cette sélection, il s'impose les critères suivants : le langage doit :

- exister depuis plus de 3 ans et être utilisé en entreprise,
ou
- ne pas exister depuis plus de 3 ans et être gratuit,
ou
- être gratuit et être utilisé en entreprise.

Pour un langage donné, on définit trois variables booléennes a , b et c de la manière suivante :

- $a = 1$ si le langage existe depuis plus de 3 ans, et $a = 0$ sinon ;
- $b = 1$ si le langage est utilisé en entreprise, et $b = 0$ sinon ;
- $c = 1$ si le langage est gratuit, et $c = 0$ sinon.

1. Écrire une expression booléenne E qui traduit les critères de sélection du professeur.
2. Dans cette question seulement, on considère un langage existant depuis plus de 3 ans qui a été sélectionné par le professeur.
 - a) Traduire cette sélection par une égalité booléenne.
 - b) À l'aide d'un calcul booléen, que peut-on en déduire concernant le langage sélectionné ?
3. À l'aide d'un tableau de Karnaugh, trouver une écriture simplifiée de l'expression booléenne E sous la forme d'une somme de deux termes.
4. Un langage de programmation payant a été écarté par le professeur car il ne correspondait pas à ses critères de sélection. Que peut-on en déduire ?

Exercice 2 (7 points)

Une société de services techniques en informatique doit mettre en place un réseau interne de 50 ordinateurs pour une entreprise. Les tâches nécessaires à la réalisation de ce projet ont été reproduites dans le tableau suivant.

Description de la tâche	Abréviation	Tâches antérieures	Durée (en jours)
Identification des besoins matériels/logiciels et commandes	COM		1
Acheminement/Livraison des OS/logiciels	LOG	COM	3
Achat du matériel pour les UC + Câbles réseau	MAT	COM	1
Acheminement/Livraison des écrans	ECR	COM	6
Assemblage des UC	ASS	MAT	1,5
Installation des OS/logiciels	INST	LOG, ASS	2
Pose des câbles réseau dans l'entreprise	CABL	MAT	4
Mise en place des postes dans l'entreprise	POST	INST, ECR	1
Configuration du réseau interne	CONF	POST, CABL	1

On considère le graphe orienté de sommets COM, LOG, MAT, ECR, ASS, INST, CABL, POST, CONF correspondant aux conditions d'antériorités données par le tableau précédent.

- Quels sont les prédécesseurs du sommet POST ?
 - Quels sont les successeurs du sommet COM ?
- Déterminer le niveau de chacun des sommets du graphe en expliquant la méthode utilisée.
- Construire le graphe d'ordonnancement du projet (selon la méthode MPM ou PERT) et établir les dates au plus tôt et au plus tard de chaque tâche.
- Déterminer le chemin critique et la durée de réalisation du projet.
- Calculer la marge totale de la tâche ASS. À quoi correspond-elle ?
 - Calculer la marge libre de la tâche ASS. À quoi correspond-elle ?

Exercice 3 (8 points)

Le but de cet exercice est l'étude d'un procédé de cryptage des lettres majuscules de l'alphabet français. Chacune des 26 lettres est associée à l'un des entiers de 0 à 25, selon le tableau de correspondance suivant.

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Nombre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Nombre	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Le cryptage se fait à l'aide d'une clé, qui est un nombre entier k fixé, compris entre 0 et 25.

Pour crypter une lettre donnée :

- on repère le nombre x associé à la lettre, dans le tableau de correspondance précédent ;
- on multiplie ce nombre x par la clé k ;
- on détermine le reste r de la division euclidienne de $k \times x$ par 26 ;
- on repère la lettre associée au nombre r dans le tableau de correspondance ; c'est la lettre cryptée.

Par exemple, pour crypter la lettre « P » avec la clé $k = 11$:

- le nombre x associé à la lettre « P » est le nombre 15 ;
- on multiplie 15 par la clé k , ce qui donne $11 \times 15 = 165$;
- on détermine le reste de 165 dans la division par 26 : on trouve 9 ;
- on repère enfin la lettre associée à 9 dans le tableau : c'est « J ».

Ainsi, avec la clé $k = 11$, la lettre « P » est cryptée en la lettre « J ».

On crypte un mot en cryptant chacune des lettres de ce mot.

Partie A – Cryptage d'un mot avec la clé $k = 11$

Dans cette partie, la clé de cryptage est $k = 11$. Le but de cette partie est de crypter le mot « BTS ».

1. Déterminer en quelle lettre est cryptée la lettre « S ». On détaillera les différentes étapes du processus de cryptage.
2. Crypter le mot « BTS ». On ne demande pas le détail du cryptage.

Partie B – Décryptage avec la clé $k = 11$

Dans cette partie, la clé de cryptage est toujours $k = 11$.

Le but de cette partie est de retrouver une lettre initiale connaissant la lettre cryptée.

1. Prouver que $19 \times 11 \equiv 1$ modulo 26.
2. Une lettre associée à un nombre x a été cryptée. Le nombre associé à la lettre cryptée est noté y .

- a) Justifier que $11 \times x \equiv y \pmod{26}$.
- b) Montrer que $19 \times y \equiv x \pmod{26}$.

Ces propriétés montrent que pour décrypter une lettre codée y avec la clé $k = 11$, il suffit de crypter cette lettre avec la clé de cryptage $k' = 19$.

Exemple : si une lettre est codée par $y = 22$, on multiplie 22 par 19 et on prend le reste du résultat dans la division euclidienne par 26 ; on obtient $x = 2$. Donc la lettre de départ est C.

- 3. Utiliser les résultats précédents pour décrypter le mot « WGA ».

Partie C – Recherche des bonnes clés de cryptage

Une clé k ne possède pas forcément une clé de décryptage associée.

On dit qu'une clé est une bonne clé de cryptage si elle possède une clé de décryptage associée.

On admet qu'une clé k est une bonne clé de cryptage si et seulement si les nombres k et 26 sont premiers entre eux.

Le but de cette partie est de trouver les bonnes clés de cryptage, parmi les nombres entiers compris entre 0 et 25.

- 1. Décomposer 26 en un produit de facteurs premiers.
- 2. En déduire la liste des nombres k compris entre 0 et 25 qui sont de bonnes clés de cryptage.