Session 2012

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SOUS ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

GROUPEMENT D

Durée : 2 heures

Spécialité	Coefficient
Analyses de biologie médicale	1
Bio analyses et contrôles	2
Biotechnologie	1,5
Hygiène-propreté-environnement	2
Industries plastiques - europlastic - à référentiel commun européen	1,5
Métiers de l'eau	1,5
Peintures, encres et adhésifs	2
Qualité dans les industries alimentaires et les bio-industries	2

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

Le formulaire de mathématiques est joint au sujet.
Une feuille de papier millimétrée est fournie.

Ce sujet comporte 4 pages (y compris celle-ci).

EXERCICE 1 (11 points)

Cet exercice propose l'étude de la contamination accidentelle d'un cours d'eau par un polluant.
La partie B est consacrée à l'étude d'une fonction qui permet d'exprimer, dans la partie C, la concentration de polluant dans l'eau en fonction du temps.

Les deux premières parties de l'exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 0{,}25y = 3\mathrm{e}^{-t}$,
où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$, et y' la fonction dérivée de la fonction y.

1. Déterminer les solutions sur l'intervalle $[0;+\infty[$ de l'équation différentielle (E_0) :

$$y' + 0{,}25y = 0$$

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $h(t) = -4\mathrm{e}^{-t}$.
Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale :

$$f(0) = 75$$

B. Étude d'une fonction et calcul intégral

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(t) = 79\mathrm{e}^{-0{,}25t} - 4\mathrm{e}^{-t}$.
On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.
Sur l'axe des *x* l'unité est : 0,5 cm. Sur l'axe des *y* l'unité est : 0,25 cm.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

2. a) Démontrer que pour tout t appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$:

$$f'(t) = \mathrm{e}^{-0{,}25t}(-19{,}75 + 4\mathrm{e}^{-0{,}75t})$$

b) Justifier que pour tout t appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$: $-19{,}75 + 4\mathrm{e}^{-0{,}75t} < 0$.

c) En déduire le signe de $f'(t)$ et le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

3. a) Compléter, après l'avoir reproduit sur la copie, le tableau de valeurs suivant dans lequel **les valeurs de $f(t)$ seront arrondies au dixième**.

t	0	5	10	15	20	25
$f(t)$		22,6		1,9	0,5	

b) Construire la courbe C sur une feuille de papier millimétré.

4. a) Démontrer que la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle [0, 20] est :

$$V_m = \frac{1}{20}(-316\,\mathrm{e}^{-5} + 4\,\mathrm{e}^{-20} + 312)$$

b) Donner la valeur approchée de V_m arrondie au dixième.

C. Exploitation des résultats de la partie B

On admet que, t semaines après la contamination, la concentration de polluant dans l'eau, exprimée en milligramme par litre, est $\frac{1}{3}f(t)$, où f est la fonction étudiée dans la partie B.

1. La baignade est sans danger lorsque la concentration de polluant dans l'eau est inférieure ou égale à 2,5 milligrammes par litre. En utilisant la courbe C construite au **3° b)** de la partie B, déterminer au bout de combien de semaines la baignade peut être autorisée.
Laisser apparents les traits utiles sur le graphique.

2. Quelle est la valeur moyenne, au cours des 20 semaines suivant la contamination, de la concentration de polluant dans l'eau ?

EXERCICE 2 (9 points)

Toutes les parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Probabilités conditionnelles

On rappelle que la probabilité qu'un événement E se réalise sachant qu'un événement F (de probabilité non nulle) est réalisé se note $P_F(E)$ *et vérifie :* $P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$.

À la suite d'une campagne de vaccination lancée par l'Organisation Mondiale de la Santé (OMS) pour lutter contre une pandémie, on estime que, dans une population donnée, il ne reste plus que 1% de personnes non vaccinées.
D'après une étude, on estime également que 95% des personnes vaccinées sont immunisées contre le virus de la pandémie et que 20% des personnes non vaccinées sont naturellement immunisées contre ce virus.

On choisit au hasard une personne dans la population concernée.
On note A l'événement : « la personne choisie est vaccinée »,
et B l'événement : « la personne choisie est immunisée contre le virus ».

1. Montrer que la probabilité que la personne choisie soit immunisée contre le virus est égale à 0,9425.

2. Calculer la probabilité que la personne choisie ait été vaccinée sachant qu'elle est immunisée contre le virus. Arrondir au millième.

B. Loi binomiale et approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

On admet que 1% des personnes d'une population donnée n'a pas été vacciné.
On prélève au hasard 400 personnes de cette population. L'effectif de la population est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 400 personnes.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 400 personnes, associe le nombre de personnes de ce prélèvement n'ayant pas été vaccinées.

1. Justifier que la variable X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

2. Calculer la probabilité qu'un prélèvement de 400 personnes contienne au plus une personne non vaccinée. Arrondir au millième.

3. On admet que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson.

a) Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

b) On désigne par X_1 une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λ a la valeur obtenue au **a)**.
Calculer une valeur approchée de $P(X_1 > 5)$ arrondie au millième.
Interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

C. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

On estime que 20% des personnes non vaccinées sont naturellement immunisées contre le virus.
Parmi les personnes non vaccinées, on prélève au hasard 200 personnes.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 200 personnes parmi les personnes non vaccinées, associe le nombre de personnes de ce prélèvement qui ne sont pas immunisées contre le virus.
On admet que Y suit la loi binomiale de paramètres 200 et 0,8.

1. On considère que la loi suivie par Y peut être approchée par une loi normale.
Montrer que les paramètres de cette loi normale sont :

$m = 160$ et $\sigma \approx 5{,}66$ (valeur de σ arrondie au centième).

2. On désigne par Y_1 une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres $m = 160$ et $\sigma = 5{,}66$.
On souhaite calculer la probabilité qu'il y ait, dans un prélèvement de 200 personnes, entre 155 et 165 personnes non immunisées contre le virus en utilisant la loi de Y_1 et en tenant compte de la correction de continuité.
Pour cela, calculer une valeur approchée de $P(154{,}5 \leq Y_1 \leq 165{,}5)$ arrondie au centième.