BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SESSION 2012

MATHÉMATIQUES

SCIENCES ET TECHNOLOGIES INDUSTRIELLES

Génie Mécanique

Option A : Productique Mécanique
Option F : Microtechniques

Génie Énergétique

Génie Civil

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 4

Ce sujet comporte 6 pages.

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

Une feuille de papier millimétré sera mise à la disposition des candidats.

--*-*

Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT LES DEUX EXERCICES ET LE PROBLÈME.

Exercice 1 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chacune des questions suivantes, **une seule** des réponses proposées est correcte.
Aucune justification n'est demandée.
Chaque bonne réponse rapporte un point. Une absence de réponse ou une mauvaise réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point.
Le candidat indiquera sur la copie, le numéro de la question, suivi de la lettre correspondant à la réponse proposée.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = \sqrt{3} - i \qquad z_B = \sqrt{3} + i \qquad z_C = -\sqrt{3} + i \qquad z_D = -\sqrt{3} - i.$$

1. Les solutions complexes de l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}\,z + 4 = 0$ sont :

a) z_C et z_D **b)** z_A et z_C **c)** z_A et z_B **d)** z_A et z_D

2. Le module et un argument du nombre complexe z_A sont :

a) $\begin{cases} |z_A| = \sqrt{2} \\ \arg z_A = -\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} |z_A| = \sqrt{2} \\ \arg z_A = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} |z_A| = 2 \\ \arg z_A = \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} |z_A| = 2 \\ \arg z_A = -\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$

3. L'ensemble des points d'affixe z tels que $\left|z - \sqrt{3} - i\right| = \left|z - \sqrt{3} + i\right|$ est :

a) la droite (CD) **b)** l'axe des abscisses **c)** l'axe des ordonnées **d)** la droite (AB)

4. Le nombre complexe $\dfrac{z_A}{z_B}$ est égal à :

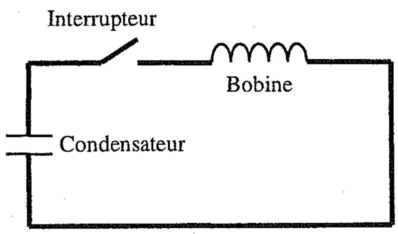
a) -1 **b)** 1 **c)** $1 - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** $\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$

5. L'affixe du point E, tel que le quadrilatère DEAC est un parallélogramme, est :

a) $-3\sqrt{3} + i$ **b)** $2\sqrt{3} - 2i$ **c)** $\sqrt{3} - 3i$ **d)** $\sqrt{3} + i$

Exercice 2 (4 points)

On considère le circuit ci-dessous composé d'une bobine, d'un condensateur et d'un interrupteur.



Le condensateur est initialement chargé.
Au temps $t = 0$, on ferme l'interrupteur. On étudie alors la décharge du condensateur dans la bobine.
On admet qu'à un instant t, la charge q du condensateur, qui est une fonction du temps t, est solution de l'équation différentielle (E) :

$$q'' + 121 \times 10^6 q = 0$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Déterminer l'expression de la solution particulière q de (E) qui vérifie les conditions :

$$q(0) = 2 \times 10^{-6} \quad \text{et} \quad q'(0) = 0.$$

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction q ainsi obtenue.

3. Montrer que l'intensité $i(t)$, définie par $i(t) = q'(t)$, où q' désigne la fonction dérivée de la fonction q, est donnée, pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$, par :

$$i(t) = -2,2 \times 10^{-2} \sin\left(11 \times 10^3 t\right).$$

4. Déterminer la valeur moyenne de la fonction q sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi \times 10^{-3}}{2 \times 11}\right]$.

On en donnera la valeur exacte.

On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ est donnée par :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Problème (11 points)

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x)=3-3\ln x+x^3$.

1. **a)** Montrer que la fonction dérivée g' de la fonction g peut s'écrire, pour tout nombre réel x strictement positif, sous la forme :

$$g'(x)=\frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x}.$$

b) Déterminer le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

c) En déduire les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2. Donner la valeur de $g(1)$.

3. Déduire des questions précédentes que la fonction g est strictement positive sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie B : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=3\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2}x^2+1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. **a)** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b) Déterminer la limite de la fonction f en 0.

2. **a)** Établir que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, on a :

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}\text{, où } g \text{ est la fonction définie dans la } \textbf{partie A}.$$

b) En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3. **a)** Montrer que sur l'intervalle $[0,5;1]$, la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en un unique point. On notera α l'abscisse de ce point.

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

4. On note $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y=\frac{1}{2}x^2+1$ dans le repère $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$. La parabole $\mathscr{P}$ est représentée en **annexe**, à rendre avec la copie.
Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.
On précisera les coordonnées du point d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.

5. Tracer sur le graphique de l'**annexe**, à rendre avec la copie, la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C : calcul d'une aire

On note $\mathscr{D}$ le domaine du plan délimité, d'une part, par les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$, d'autre part, par les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=\mathrm{e}$.

1. Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ sur le graphique de l'**annexe,** à rendre avec la copie.

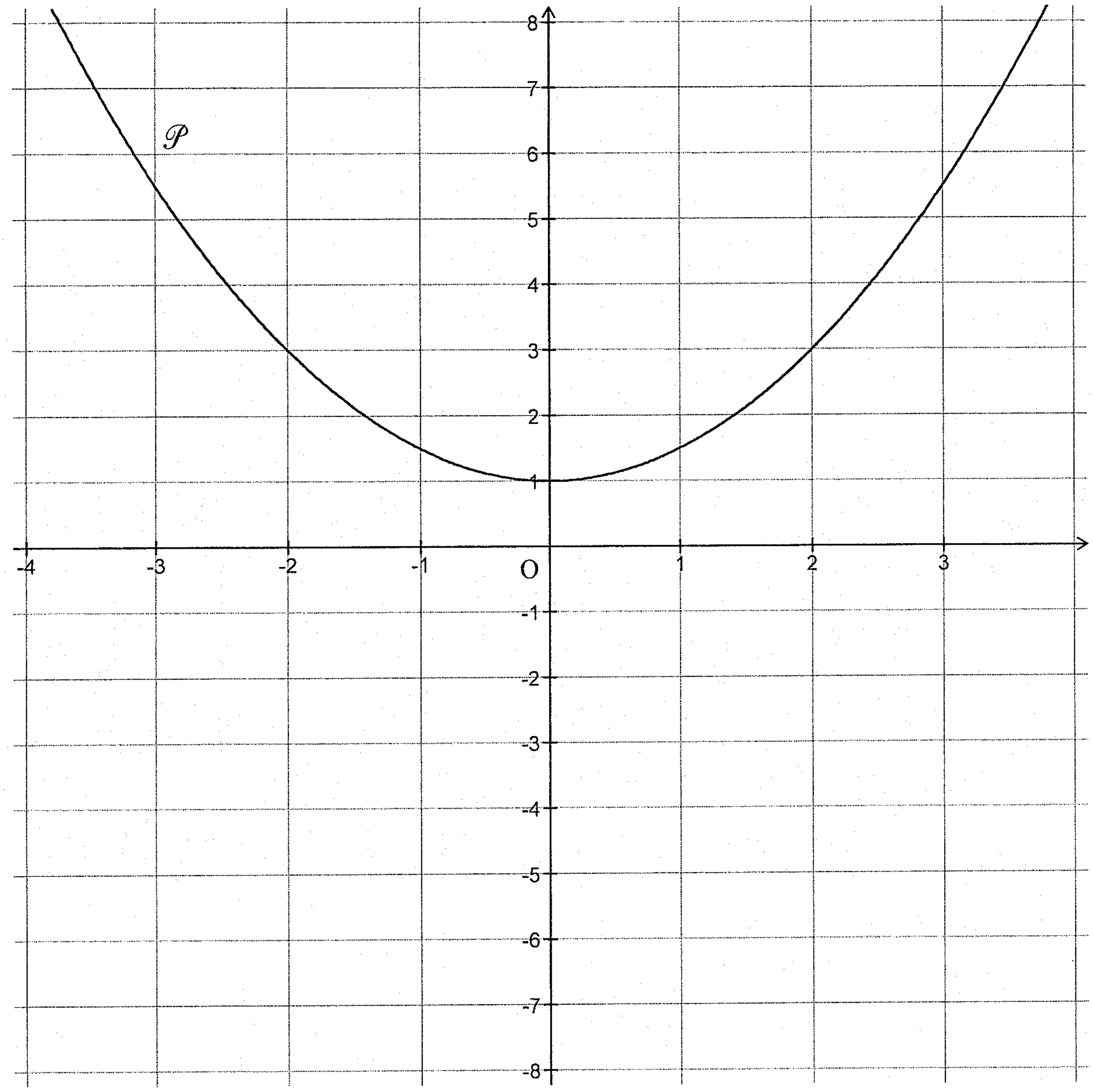
2. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $h(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

   Calculer $h'(x)$, où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

3. Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine $\mathscr{D}$, exprimée en unité d'aire.

Annexe (problème)

à rendre avec la copie



BACCALAURÉAT, SÉRIES STI (toutes spécialités),
STL (spécialités physique de laboratoire et de procédés industriels
chimie de laboratoire et de procédés industriels)

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\varnothing) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leqslant x)$

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (E(X))^2$

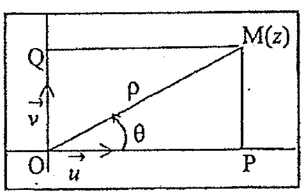
Écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II. ALGÈBRE

A. *NOMBRES COMPLEXES*

Forme algébrique : $z = x + \mathrm{i}\, y$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = \rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\rho > 0$



$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$

$\overline{OP} = x = \Re e(z) = \rho\cos\theta$

$\overline{OQ} = y = \Im m(z) = \rho\sin\theta$

$OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Opérations algébriques

$z + z' = (x + \mathrm{i}y) + (x' + \mathrm{i}y') = (x + x') + \mathrm{i}(y + y')$

$zz' = (x + \mathrm{i}y)(x' + \mathrm{i}y') = (xx' - yy') + \mathrm{i}(xy' + x'y)$

Conjugué

$z = x + \mathrm{i}y = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$; $\overline{z} = x - \mathrm{i}y = \rho\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$

$x = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$; $y = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z})$

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$

$z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\dfrac{-y}{x^2 + y^2} = \dfrac{1}{\rho}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$zz' = (\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(\rho'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}) = \rho\rho'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta + \theta')}$

$|zz'| = |z||z'|$

$\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\rho'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \dfrac{\rho}{\rho'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta - \theta')}$

$\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

$z^n = (\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$

Inégalité triangulaire

$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

(valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

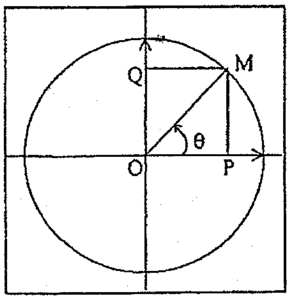
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$

C. TRIGONOMÉTRIE



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'Euler

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$; $\sin\theta = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

Formules d'addition

$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$

$\cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2a)$; $\sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2a)$

Formules de Moivre

Pour tout entier naturel non nul n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

soit encore $\quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

D. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles
$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$
- si $\Delta = 0$, une solution réelle double
$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$
- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées
$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z-z_1)(z-z_2)$.

$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$, $\quad z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

E. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $\quad u_{n+1} = u_n + a$; $\quad u_n = u_0 + na$

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $\quad u_{n+1} = bu_n$; $\quad u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $\quad S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$

Si $b = 1$, $\quad S_n = n+1$

III. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,
$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,
$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET DE SUITES*

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Comportement à l'origine de $\ln(1 + x)$, e^x, $\sin x$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$

2. Suites (SÉRIES STI, spécialités génie électronique et génie électrotechnique, STL, spécialité physique de laboratoire et de procédés industriels)

Si $k > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = +\infty$; si $0 < k < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\dfrac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u'+v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v+uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$(v\circ u)' = (v'\circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$

$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))\,dt = \alpha\int_a^b f(t)\,dt + \beta\int_a^b g(t)\,dt$

Positivité

Si $a\leqslant b$ et $f\geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a\leqslant b$ et $f\leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$

Si $a\leqslant b$ et $m\leqslant f\leqslant M$, alors $m(b-a)\leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a\,,b]$: $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

Équations	Solutions sur $]-\infty\,,+\infty[$
$y'-ay=0$	$f(x)=ke^{ax}$
$y''+\omega^2y=0$	$f(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x$