BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

Session 2012

Épreuve :

MATHÉMATIQUES

Série : SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LABORATOIRE

Spécialité : BIOCHIMIE GÉNIE BIOLOGIQUE

Durée de l'épreuve : 2 heures

Coefficient : 2

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel, distribué par le centre d'examen, est autorisé.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

La feuille annexe page 5/5 est à rendre avec la copie.

EXERCICE 1 (***8 points***)

En 2010, un groupe pharmaceutique spécialisé dans la recherche et le développement de médicaments emploie 13 000 personnes dans le monde, dont 1 800 dans des laboratoires en France. Ces employés se repartissent dans l'administration, la vente et la recherche.

Parmi le personnel en France :

- 62 % sont des femmes,
- il y a autant d'hommes que de femmes dans l'administration,
- le département de la recherche regroupe 400 personnes dont 40% sont des femmes,
- parmi les personnes chargées de la vente, 150 sont des hommes.

1. Quel pourcentage du groupe pharmaceutique représente le groupe français ? Donner le résultat arrondi à 0,1 % près.

2. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Personnel en France	Administration	Vente	Recherche	Total
Femmes				
Hommes				
Total				1 800

Pour toute la suite, on arrondira tous les résultats à 10^{-2} près.

3. On choisit au hasard une personne de cette population, toutes les personnes ayant la même probabilité d'être choisies. On considère les événements :

F : « la personne est une femme »
A : « la personne travaille dans l'administration »
V : « la personne s'occupe des ventes »
R : « la personne est dans la recherche »

a. Calculer $p(F)$, $p(R)$.

b. Citer deux événements incompatibles. Justifier.

c. Définir par une phrase les événements : $F \cap A$, $\overline{F} \cap R$ et $F \cup V$.
Calculer la probabilité de ces événements.

4. On choisit au hasard une personne parmi le personnel chargé de la vente. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

5. En 2010, ce groupe pharmaceutique a investi 5,2 milliards de dollars dans la recherche soit 16% de son chiffre d'affaires.

a. Quel est son chiffre d'affaires ?

b. ***Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.***
Dès l'année 2011, et chaque année suivante, le groupe prévoit d'augmenter de 10 % son chiffre d'affaires.
En quelle année, le groupe aura-t-il, pour la première fois, doublé son chiffre d'affaires de 2010 ?

EXERCICE 2 (***12 points***)

La souche d'*Acetobacter* est cultivée dans un milieu liquide contenant les substrats appropriés et de l'acide para-aminobenzoïque (PABA), indispensable à cette bactérie. On étudie la croissance de cette souche.

PARTIE A

Le tableau ci-dessous donne le nombre n_i de bactéries par unité de volume à différents temps de culture t_i (en heures).

t_i	4	5	6	7	8	9	10	11
n_i	$1{,}38\times10^5$	$2{,}51\times10^5$	$5{,}75\times10^5$	$1{,}32\times10^6$	$3{,}02\times10^6$	$6{,}92\times10^6$	$1{,}51\times10^7$	$2{,}51\times10^7$
$z_i = \ln(n_i)$						15,7		

1. On pose $z_i = \ln(n_i)$. Compléter le tableau sur la feuille annexe, les valeurs de z_i seront arrondies au dixième.

2. Représenter le nuage de points $M_i(t_i ; z_i)$ dans un repère orthogonal ; on prendra pour origine le point de coordonnées (4 ; 9) et pour unités : 1 cm pour 1 heure en abscisse et 2 cm pour 1 unité en ordonnée.

3. On désigne par G_1 le point moyen des quatre premiers points du nuage et par G_2 celui des quatre derniers.

a. Calculer les coordonnées de G_1 et de G_2 et tracer la droite (G_1G_2) sur le graphique.

b. Déterminer une équation de la droite (G_1G_2) sous la forme $z = at + b$ où a sera arrondi à 10^{-2} près et b sera arrondi à 10^{-1} près.

4. On admet que cette droite donne un ajustement satisfaisant du nuage de points. On prendra comme équation réduite de cette droite : $z = 0{,}78t + 8{,}6$.

a. Déterminer, par un calcul, le nombre de bactéries au bout de 12 heures.

b. Déterminer, par une lecture graphique, à partir de quelle heure le nombre de bactéries dépasse 300 millions.

PARTIE B

Une étude mathématique différente conduit à supposer que la fonction N qui, à t (exprimée en heures), associe le nombre de bactéries $N(t)$, est solution de l'équation différentielle : $N'(t) = 0{,}78N(t)$.
Le nombre de bactéries à l'instant initial est de 5 432.

1. a. Donner les solutions de l'équation différentielle ci-dessus.

c. Déterminer, parmi les solutions précédentes, la solution N qui vérifie la condition $N(0) = 5432$.

2. Soit N la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $N(t) = 5432e^{0,78t}$.

a. Déterminer la limite de la fonction N en $+\infty$.

b. Calculer $N'(t)$. En déduire le tableau de variations de la fonction N sur $[0;+\infty[$.

3. **a.** Déterminer le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe représentative de la fonction N au point d'abscisse 6. On arrondira à l'unité près.

b. Sachant que $N'(t)$ représente la vitesse instantanée de formation des bactéries, déterminer cette vitesse à l'instant t = 6 heures.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, toute initiative même infructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer à partir de quel instant t, exprimé en heures, le nombre de bactéries dépasse 300 millions.

Feuille annexe à rendre avec la copie

Exercice 2

Partie A question 1.

t_i	4	5	6	7	8	9	10	11
n_i	$1,38\times10^5$	$2,51\times10^5$	$5,75\times10^5$	$1,32\times10^6$	$3,02\times10^6$	$6,92\times10^6$	$1,51\times10^7$	$2,51\times10^7$
$z_i=\ln(n_i)$						15,7		

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES
BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE STL Spécialité Biochimie – Génie Biologique

I. STATISTIQUE

Moyenne, variance, écart type

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad ; \quad V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}$$

Dans le cas d'un regroupement en classes :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i \; ; \; V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - (\bar{x})^2$$

II. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \quad ; \quad P(\Omega) = 1 \quad ; \quad P(\varnothing) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

III. ALGÈBRE

A. *SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES*

Suites arithmétiques

Premier terme $u_0 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + a \quad ; \quad u_n = u_0 + na$

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $S_n = n + 1$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

C. *ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ*

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

Si $\Delta \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

IV. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$ln\,1 = 0$

$ln\,e = 1$

$ln\,ab = ln\,a + ln\,b$

$ln\frac{a}{b} = ln\,a - ln\,b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = exp\,x = e^x$ équivaut à $x = ln\,y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x\,ln\,a}$ $(a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$ln\,a^x = x\,ln\,a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha\,ln\,x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS*

Comportement à l'infini

$\lim_{x\to+\infty} ln\,x = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{x\to0} ln\,x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x\to0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim_{x\to0} x^\alpha = +\infty$

Croissances comparées à l'infini

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{ln\,x}{x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, n entier naturel

$\lim_{x\to+\infty} \frac{ln\,x}{x^n} = 0$, n entier naturel non nul

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\dfrac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$

$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u'+v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v+uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$(v\circ u)' = (v'\circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL* [redacted]

Formule fondamentale

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$: $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES*

Équations	Solutions sur $]-\infty,+\infty[$
$y'-ay=0$	$f(x)=ke^{ax}$