BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
INFORMATIQUE DE GESTION

Options : - Développeur d'applications
- Administrateur de réseaux locaux d'entreprise

SESSION 2011

SUJET

ÉPREUVE EF2 – MATHÉMATIQUES II

Durée : 1 heure **coefficient : 1**

Calculatrice autorisée, *conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 :*
« Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante, sont autorisées.
Les échanges de machines entre candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices sont interdits ».

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet. Il comprend :

- **3 pages numérotées de la page 1/3 à 3/3.**
- **le formulaire de mathématiques composé de 4 pages.**

Exercice n°1 (8 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est correcte.
Chaque bonne réponse rapporte 2 points. Une absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point.
On notera sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant la réponse choisie.

Question1 :
On donne le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 des fonctions f et g définies et dérivables sur **R** :

$$f(t)=1+t^2+t^2\varepsilon_1(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t\to 0}\varepsilon_1(t)=0$$

et

$$g(t)=2t-t^2+t^2\varepsilon_2(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t\to 0}\varepsilon_2(t)=0.$$

Le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction h définie sur **R** par $h(t)=f(t)\times g(t)$ est :

A : $h(t)=2t-t^2+2t^3+t^3\varepsilon(t)$ avec $\lim_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$;

B : $h(t)=2t-t^2+t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$;

C : $h(t)=1+2t+t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$.

Question 2 :
On considère l'équation différentielle (E) : $y'-2y=xe^x$.
La fonction f définie sur **R** par :
A : $f(x)=e^{-2x}$ B : $f(x)=e^{2x}+x\,e^x$ C : $f(x)=e^{2x}+(-x-1)\,e^x$
est solution de l'équation différentielle (E).

Question 3 :
Un institut pratique des sondages téléphoniques. On étudie le temps écoulé, avant que la personne appelée ne décroche.
Lors d'une étude portant sur un échantillon aléatoire et non exhaustif de 300 appels, on a obtenu comme moyenne, exprimée en secondes, $\bar{x}=32$, et comme écart-type, exprimé en secondes, $s=2{,}30$.
On admet qu'une estimation ponctuelle de l'écart-type sur la population est de 2,30.

Un intervalle de confiance de la moyenne m de la population avec le coefficient de confiance de 95 % est l'intervalle I :

A : $I=\left[32-1{,}96\times\frac{2{,}30}{\sqrt{300}};32+1{,}96\times\frac{2{,}30}{\sqrt{300}}\right]$;

B : $I=\left[32-1{,}64\times\frac{2{,}30}{\sqrt{300}};32+1{,}64\times\frac{2{,}30}{\sqrt{300}}\right]$;

C : $I=\left[32-1{,}96\times\frac{2{,}30}{300};32+1{,}96\times\frac{2{,}30}{300}\right]$.

Question 4 :
Une entreprise produit des plats cuisinés.
Un échantillon aléatoire et non exhaustif de 50 plats est prélevé ; on obtient, pour cet échantillon, les moyenne et écart-type respectifs suivants, arrondis au centième : $\bar{x} = 420{,}50$ grammes et $s = 3{,}10$ grammes.
Les estimations ponctuelles, obtenues à partir de cet échantillon et arrondies au centième, de la moyenne m et de l'écart-type σ de l'ensemble de la production de plats cuisinés (en grammes) sont :

A : $m = 420{,}50$ et $\sigma = 3{,}10$;
B : $m = 420{,}50$ et $\sigma = 3{,}13$;
C : $m = 424{,}77$ et $\sigma = 3{,}10$.

Exercice n°2 (12 points)

On considère la variable aléatoire T mesurant le temps de bon fonctionnement, exprimé en jours, du dispositif de chargement du papier dans une certaine photocopieuse.
Cette variable aléatoire T est une variable aléatoire continue, de fonction de densité de probabilité f définie sur **R** par :

$$f(x) = 0{,}2\,\mathrm{e}^{-0{,}2x}.$$

On rappelle que la probabilité que le dispositif ait une défaillance avant l'instant t est donnée par :

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que : $F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}2t}$.

2. On pose $R(t) = 1 - F(t)$. On appelle taux d'avarie instantané à l'instant t le rapport égal à $\dfrac{f(t)}{R(t)}$.

Calculer ce taux d'avarie instantané.

3. On note A l'évènement « $T \leq 10$ », et B l'événement « $T \leq 15$ ».
Les résultats seront arrondis au millième.

a) Calculer $P\left(\overline{A}\right)$.
b) Calculer $P_B(A)$.
c) Calculer la probabilité que le temps de bon fonctionnement soit supérieur à 15 jours, sachant qu'il est supérieur à 10 jours.

4. On note E l'intégrale $\int_0^1 x\,f(x)\,\mathrm{d}x$.

En utilisant une intégration par parties, calculer E.