

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SESSION 2011

MATHÉMATIQUES

SCIENCES ET TECHNOLOGIES INDUSTRIELLES

Génie Mécanique

Option A : Productique Mécanique

Option F : Microtechniques

Génie Énergétique

Génie Civil

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 4

Ce sujet comporte 5 pages.

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire
n°99-186 du 16 novembre 1999.

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

Une feuille de papier millimétré sera mise à la disposition des candidats.

*_*_*_*

*Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des
raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

**LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT LES DEUX EXERCICES
ET LE PROBLÈME**

Exercice 1 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = 2\sqrt{3} - 2i$, $b = -2 - 2\sqrt{3}i$, $c = -4$ et $d = 4i$.

1. a) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes a et b .
b) Placer les points A, B, C et D dans le plan muni du repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.
2. a) Montrer que les points A, B, C et D sont un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
b) Vérifier que $d - a = \sqrt{3}(c - b)$.
c) Calculer les distances AB et CD .
d) Dédire des questions 2.b) et 2.c) que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze isocèle.

Exercice 2 (5 points)

On considère l'équation différentielle notée (E) :

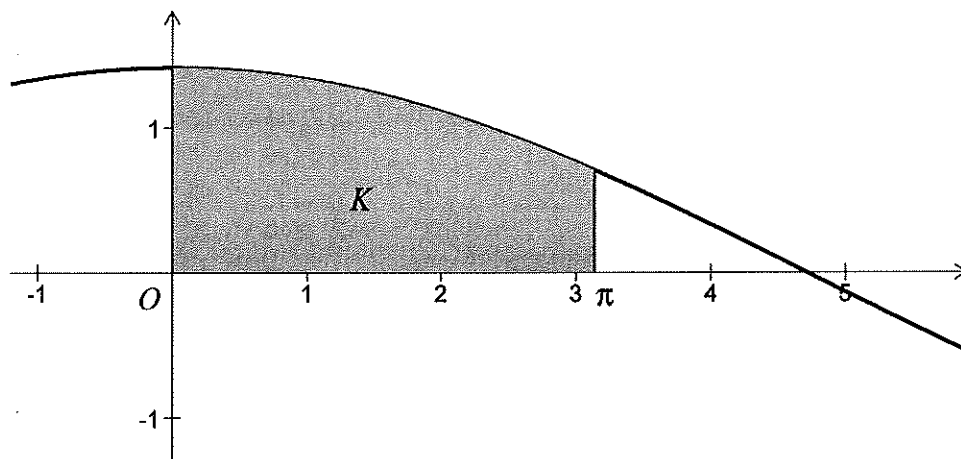
$$y'' + \frac{1}{9}y = 0,$$

où y désigne une fonction de la variable réelle définie et deux fois dérivable sur l'ensemble \mathbf{R} des nombres réels et où y'' désigne sa dérivée seconde.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) .
2. Déterminer l'expression de la fonction f solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1$ et $f'(3\pi) = 0$.
3. On considère la fonction g définie sur l'ensemble \mathbf{R} des nombres réels par :

$$g(x) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{1}{3}x\right).$$

On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction g , dans un repère orthogonal du plan. On note K la partie du plan comprise entre la courbe représentative de la fonction g , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \pi$.



- a) Justifier que pour tout nombre réel x , $[g(x)]^2 = 1 + \cos\left(\frac{2}{3}x\right)$.
- b) On considère le solide S engendré par la rotation de la partie K autour de l'axe des abscisses. Calculer la valeur exacte, en unité de volume, du volume V du solide S .

On rappelle que : $V = \pi \int_0^\pi [g(x)]^2 dx$.

Problème (11 points)

Partie A : exploitation d'un graphique

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

La courbe \mathcal{C} ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'ensemble \mathbf{R} des nombres réels par :

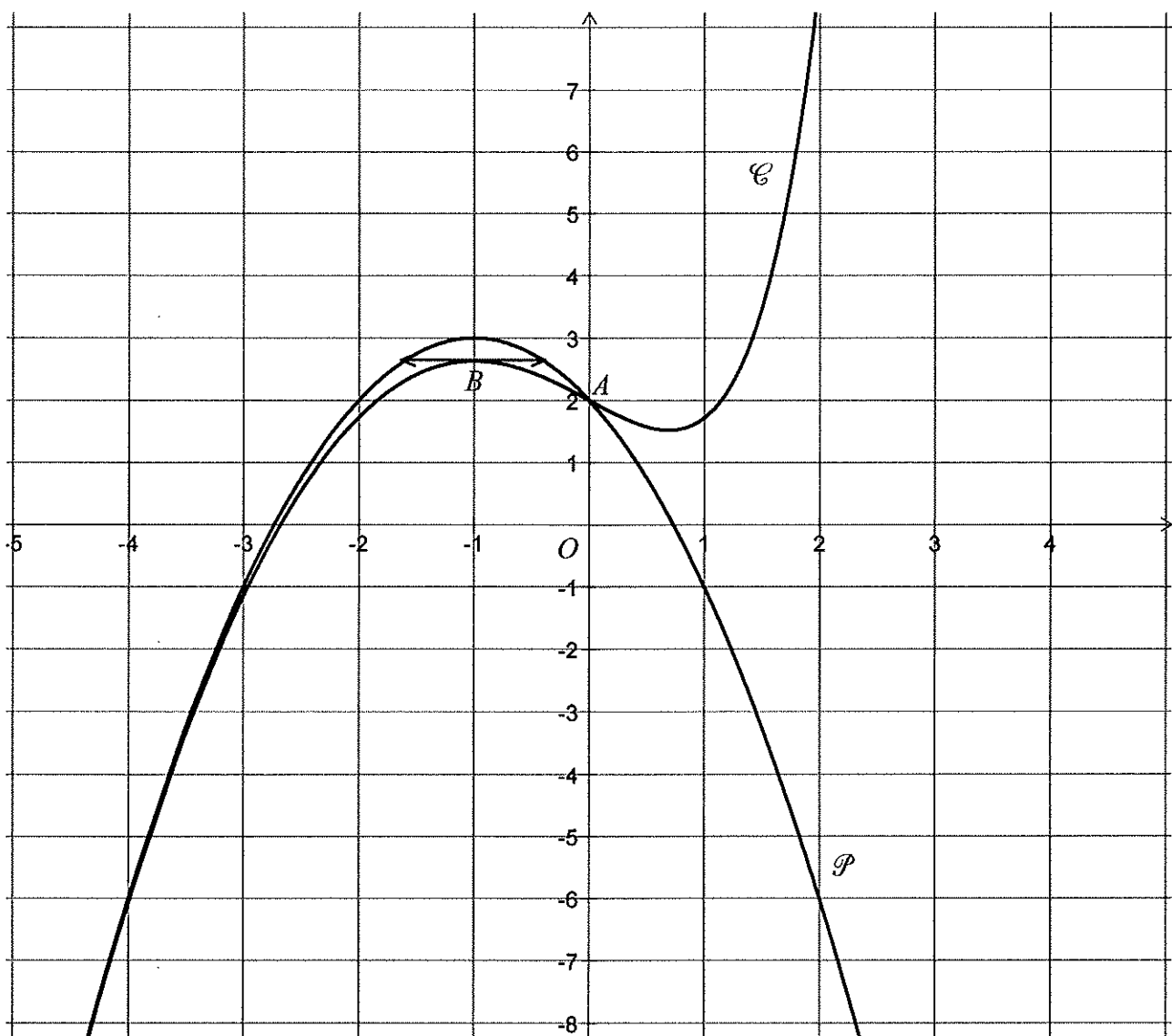
$$f(x) = xe^x + ax^2 + bx + c,$$

où a , b et c désignent trois nombres réels. On note f' la fonction dérivée de f sur \mathbf{R} .

Cette courbe \mathcal{C} passe par les points $A(0;2)$ et $B(-1;3-e^{-1})$. Au point B , la tangente à la courbe \mathcal{C} est parallèle à l'axe des abscisses.

La parabole \mathcal{P} représente la fonction g définie sur l'ensemble \mathbf{R} des nombres réels par :

$$g(x) = -x^2 - 2x + 2.$$



1. a) Donner la valeur de $f(0)$. En déduire la valeur de c .
 b) Donner la valeur de $f(-1)$. En déduire une relation entre a et b .
2. a) Donner la valeur de $f'(-1)$.
 b) Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et de b . En déduire une deuxième relation entre a et b .
3. À l'aide des questions 1.b) et 2.b), déterminer les valeurs de a et b .

Dans la suite, on admettra que pour tout nombre réel x , $f(x)$ s'exprime par :

$$f(x) = x e^x - x^2 - 2x + 2.$$

Partie B : étude d'une fonction

1. a) Vérifier que $f(x)$ peut se mettre sous la forme $x(e^x - x - 2) + 2$.
 b) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
 c) Déterminer, lorsque x tend vers $-\infty$, la limite de $f(x) - g(x)$.
 Interpréter graphiquement le résultat.
 d) Étudier les positions relatives des courbes \mathcal{C} et \mathcal{P} .
2. a) Vérifier que $f(x)$ peut se mettre sous la forme $x^2 \left(\frac{e^x}{x} - \frac{2}{x} - 1 \right) + 2$.
 b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. a) Établir que pour tout nombre réel x , $f'(x) = (x+1)(e^x - 2)$.
 b) Résoudre dans l'ensemble \mathbf{R} des nombres réels l'inéquation : $e^x - 2 > 0$.
 c) Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x .
 d) Dresser le tableau de variation de la fonction f .
 On donnera la valeur exacte de $f(\ln 2)$.

Partie C : calcul d'aire

On considère les fonctions H et h définies sur l'ensemble \mathbf{R} des nombres réels par :

$$H(x) = (x-1)e^x \quad \text{et} \quad h(x) = x e^x.$$

1. Montrer que la fonction H est une primitive de la fonction h sur \mathbf{R} .
2. Calculer l'aire du domaine du plan délimité par la courbe \mathcal{C} , la parabole \mathcal{P} et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \ln 2$. Le résultat sera exprimé en unité d'aire.