BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2011

MATHÉMATIQUES

Série : **ES**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : **5**

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
Il est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (*6 points*)

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On s'intéresse dans cet exercice à la fonction f définie sur l'ensemble des réels **R** par

$$f(x)=-1+x\mathrm{e}^{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
   (*On rappelle le résultat :* $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x}=0$)

2. On admet que la fonction f est dérivable sur **R** et on note f' sa fonction dérivée.
   a. Montrer que, pour tout nombre réel x on a $f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^{x}$.
   b. Dresser le tableau de variation de la fonction f (la valeur de l'extremum sera arrondie à 10^{-2}).

3. Justifier que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

4. Démontrer qu'une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est $y=x-1$.

5. Dans le repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ tracer la droite T et la courbe $\mathscr{C}$.
   Quelle conjecture peut-on faire sur la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite T ?

6. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Justifier la conjecture émise à la question 5.

Exercice 2 (*5 points*)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Dans une ville, une enquête portant sur les habitudes des ménages en matière d'écologie a donné les résultats suivants :

- 70 % des ménages pratiquent le tri sélectif ;
- parmi les ménages pratiquant le tri sélectif, 40 % consomment des produits bio ;
- parmi les ménages ne pratiquant pas le tri sélectif, 10 % consomment des produits bio.

On choisit un ménage au hasard (tous les ménages ayant la même probabilité d'être choisis) et on note :

T l'événement « le ménage pratique le tri sélectif » et $\overline{\mathrm{T}}$ son événement contraire ;

B l'événement « le ménage consomme des produits bio » et $\overline{\mathrm{B}}$ son événement contraire.

Les résultats seront donnés sous forme décimale.

1. a. Donner sans justification la probabilité $p(\mathrm{T})$ de l'événement T.

   b. Donner sans justification $p_{\mathrm{T}}(\mathrm{B})$ et $p_{\overline{\mathrm{T}}}(\mathrm{B})$.

2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

3. a. Calculer la probabilité de l'événement : « le ménage pratique le tri sélectif et consomme des produits bio ».

   b. Montrer que la probabilité que le ménage consomme des produits bio est égale à 0,31.

4. Calculer la probabilité que le ménage pratique le tri sélectif sachant qu'il consomme des produits bio (le résultat sera donné sous forme décimale arrondie au centième).

5. Les événements T et B sont-ils indépendants ? Justifier.

6. Calculer la probabilité de l'événement $\mathrm{T} \cup \mathrm{B}$ puis interpréter ce résultat.

7. Cette ville décide de valoriser les ménages ayant un comportement éco-citoyen. Pour cela, elle donne chaque année un chèque de 20 € aux ménages qui pratiquent le tri sélectif et un chèque de 10 € aux ménages qui consomment des produits bio sur présentation de justificatifs (les deux montants peuvent être cumulés).
   Soit S la somme d'argent reçue par un ménage.

   a. Quelles sont les différentes valeurs que peut prendre S ? (on n'attend pas de justification).

   b. Donner la loi de probabilité de S.

   c. Calculer l'espérance mathématique de cette loi et interpréter ce résultat.

Exercice 3 (*4 points*)

Commun à tous les candidats

Le tableau suivant donne la valeur de revente d'une machine outil au bout de t années d'utilisation (les prix sont donnés en centaines d'euros). On veut faire une estimation de son prix de revente au-delà de 6 ans.

Temps écoulé depuis l'achat t_i $0 \leqslant i \leqslant 6$	0	1	2	3	4	5	6
Valeur de revente y_i en centaines d'euros $0 \leqslant i \leqslant 6$	90	73,8	60	49,5	40,5	33	27

1. Quel est le pourcentage de baisse du prix de revente de la machine au bout de six ans d'utilisation (de t_0 à t_6) ?

2. Étude d'un modèle affine

   a. Représenter graphiquement le nuage de points $M(t_i\,;\,y_i)$ pour $0 \leqslant i \leqslant 6$ dans un repère orthogonal, en prenant comme unités graphiques :
      - 1cm pour une unité sur l'axe des abscisses ;
      - 1cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées.

   b. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite de régression de y en t par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au centième). Tracer cette droite dans le repère précédent.

   c. On sait qu'au bout de 10 ans la valeur de revente est de 1 000 euros. Le modèle vous semble-t-il adapté pour des calculs à plus long terme ?

3. Étude d'un modèle exponentiel

   a. Pour $0 \leqslant i \leqslant 6$, on pose $z_i = \ln(y_i)$. Recopier et compléter le tableau suivant (en arrondissant les nombres au dixième) :

Temps écoulé depuis l'achat t_i $0 \leqslant i \leqslant 6$	0	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ln(y_i)$ $0 \leqslant i \leqslant 6$							

   b. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de z en t par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au dixième).

   c. En déduire que $y = \mathrm{e}^{-0,2t+4,5}$ est un ajustement exponentiel possible.

   d. Déterminer à l'aide de ce modèle une estimation de la valeur de revente au bout de 10 ans d'utilisation. Ce modèle vous semble-t-il mieux adapté que celui de l'ajustement affine ? Justifier la réponse.

Exercice 4 *(5 points)*

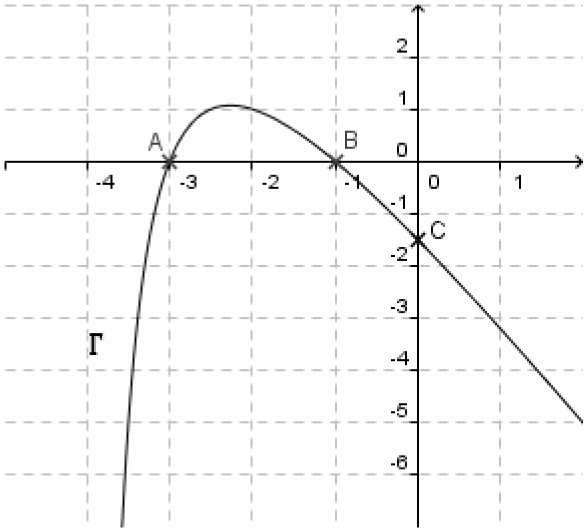
Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-4\ ;+\infty[$.

On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]-4\ ;+\infty[$.

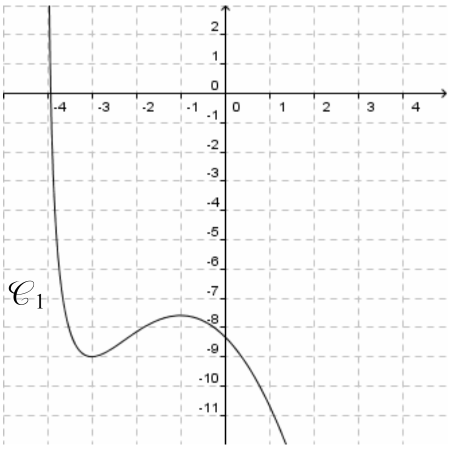
La courbe Γ ci-contre est la représentation graphique dans un repère orthogonal de f', la fonction dérivée de f sur $]-4\ ;+\infty[$.

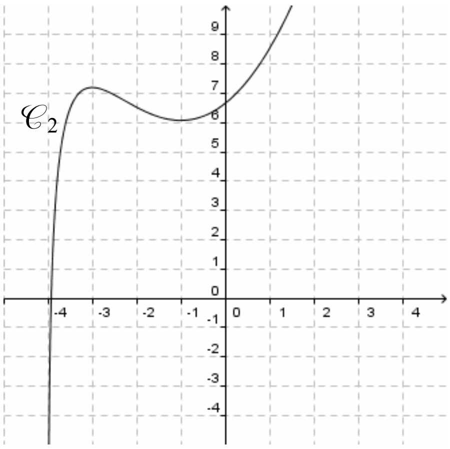
Cette courbe Γ passe par les points A(– 3 ; 0), B(– 1 ; 0) et C(0 ; – 1,5).

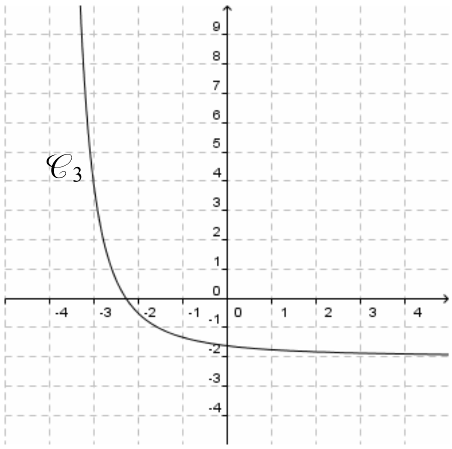


Partie A

1. A l'aide de la représentation graphique de la fonction dérivée f', déterminer $f'(0)$ et $f'(-3)$.
2. Trois courbes sont présentées ci-dessous. Une seule de ces trois courbes peut représenter la fonction f.
   Déterminer laquelle des trois représentations graphiques ci-dessous est celle de la fonction f, en justifiant votre réponse :







Partie B

On suppose qu'il existe deux entiers relatifs a et b tels que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-4\ ;+\infty[$, on a $f(x) = ax^2 + b\ln(x+4)$.

1. a. Soit x un réel appartenant à l'intervalle $]-4\ ;+\infty[$.
   Exprimer $f'(x)$ en fonction de x, a et b.
   b. Déduire des questions précédentes que $a = -1$ et $b = -6$.
2. On considère l'intégrale $I = \int_{-3}^{-1} f'(x)\,\mathrm{d}x$
   a. Calculer la valeur exacte de l'intégrale I puis en donner une valeur arrondie au dixième.
   b. Donner une interprétation géométrique de l'intégrale I.