

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2011

MATHÉMATIQUES

Série : ES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter tous les exercices.
Il est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice 1 (6 points)

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

On s'intéresse dans cet exercice à la fonction f définie sur l'ensemble des réels \mathbf{R} par

$$f(x) = -1 + xe^x.$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.
 - a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
 - b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
(On rappelle le résultat : $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$)
2. On admet que la fonction f est dérivable sur \mathbf{R} et on note f' sa fonction dérivée.
 - a. Montrer que, pour tout nombre réel x on a $f'(x) = (x+1)e^x$.
 - b. Dresser le tableau de variation de la fonction f (la valeur de l'extremum sera arrondie à 10^{-2}).
3. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0; 1]$.
Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
4. Démontrer qu'une équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0 est $y = x - 1$.
5. Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tracer la droite T et la courbe \mathcal{C} .
Quelle conjecture peut-on faire sur la position de la courbe \mathcal{C} par rapport à la droite T ?
6. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Justifier la conjecture émise à la question 5.

Exercice 2 (5 points)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Deux enfants Alexis et Bilal jouent dans la cour de leur immeuble.

Ils décident d'entamer une compétition formée d'une série de parties (notées partie 1, partie 2, ...).

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 1. On suppose que :

- Alexis a 65 % de chances de gagner la partie 1 ;
- si Alexis gagne la partie n , alors il a 10 % de chances de gagner la partie $n+1$;
- si Alexis perd la partie n , alors il a 60 % de chances de gagner la partie $n+1$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note :

- A_n l'événement : « Alexis gagne la partie n » ;
- B_n l'événement : « Bilal gagne la partie n » (on remarquera que : $B_n = \overline{A_n}$) ;
- a_n la probabilité de l'événement A_n et b_n celle de l'événement B_n .

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

PARTIE A : Etude d'un graphe probabiliste

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice ligne représentant l'état probabiliste lors de la partie n .

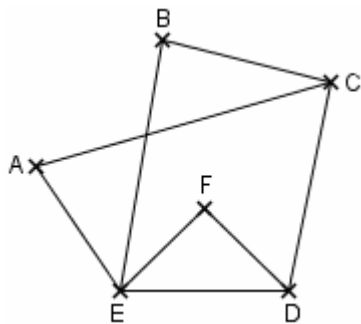
- Donner sans justification la matrice P_1 .
 - Traduire la situation à l'aide d'un graphe probabiliste.
- On admet que la matrice de transition M associée au graphe probabiliste précédent est
$$M = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$
 - Donner M^2 (on pourra utiliser la calculatrice ; les coefficients de M^2 seront donnés sous forme décimale exacte).
 - En déduire la probabilité que Bilal gagne la partie 3, en justifiant la réponse (le résultat sera donné sous forme décimale arrondie à 10^{-2}).
- Soit $P = (x \quad y)$ la matrice correspondant à l'état stable (x et y sont des nombres réels tels que $x + y = 1$).
 - Déterminer les nombres x et y .
 - Interpréter ces deux valeurs.

PARTIE B : Détermination d'un nombre chromatique

Carlos (C), Dora (D), Edwige (E) et Farid (F), eux aussi intéressés par le jeu, décident de rejoindre Alexis (A) et Bilal (B) et de former ainsi des équipes.

Comme ils ne s'entendent pas tous entre eux, ils optent pour une répartition en équipe par affinité.

On donne ci-après le graphe G d'incompatibilité entre les différents enfants :



Par exemple, Alexis ne peut pas se trouver dans une équipe où il y aurait Carlos ou Edwige.

Cela est représenté dans le graphe par le fait que les sommets A et C, ainsi que les sommets A et E sont adjacents.

1. Déterminer un sous-graphe complet d'ordre 3. Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique du graphe G ?
2. Donner en justifiant un encadrement du nombre chromatique du graphe G.
3. Proposer une coloration du graphe (sans justification) puis en déduire le nombre chromatique du graphe G.
4. Proposer une répartition des enfants faisant intervenir un nombre minimal d'équipes.

Exercice 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

Le tableau suivant donne la valeur de revente d'une machine outil au bout de t années d'utilisation (les prix sont donnés en centaines d'euros). On veut faire une estimation de son prix de revente au-delà de 6 ans.

Temps écoulé depuis l'achat t_i $0 \leq i \leq 6$	0	1	2	3	4	5	6
Valeur de revente y_i en centaines d'euros $0 \leq i \leq 6$	90	73,8	60	49,5	40,5	33	27

1. Quel est le pourcentage de baisse du prix de revente de la machine au bout de six ans d'utilisation (de t_0 à t_6) ?
2. Étude d'un modèle affine
 - a. Représenter graphiquement le nuage de points $M(t_i; y_i)$ pour $0 \leq i \leq 6$ dans un repère orthogonal, en prenant comme unités graphiques :
 - 1 cm pour une unité sur l'axe des abscisses ;
 - 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées.
 - b. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite de régression de y en t par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au centième). Tracer cette droite dans le repère précédent.
 - c. On sait qu'au bout de 10 ans la valeur de revente est de 1 000 euros. Le modèle vous semble-t-il adapté pour des calculs à plus long terme ?
3. Étude d'un modèle exponentiel
 - a. Pour $0 \leq i \leq 6$, on pose $z_i = \ln(y_i)$. Recopier et compléter le tableau suivant (en arrondissant les nombres au dixième) :

Temps écoulé depuis l'achat t_i $0 \leq i \leq 6$	0	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ln(y_i)$ $0 \leq i \leq 6$							

- b. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de z en t par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au dixième).
 - c. En déduire que $y = e^{-0,2t+4,5}$ est un ajustement exponentiel possible.
 - d. Déterminer à l'aide de ce modèle une estimation de la valeur de revente au bout de 10 ans d'utilisation. Ce modèle vous semble-t-il mieux adapté que celui de l'ajustement affine ? Justifier la réponse.

Exercice 4 (5 points)

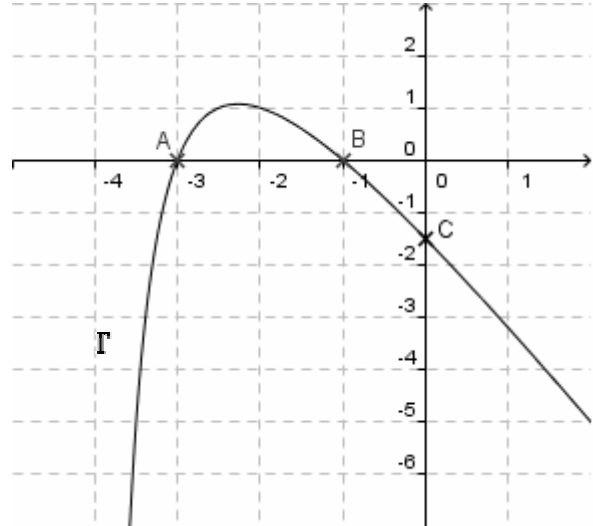
Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-4 ; +\infty[$.

On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]-4 ; +\infty[$.

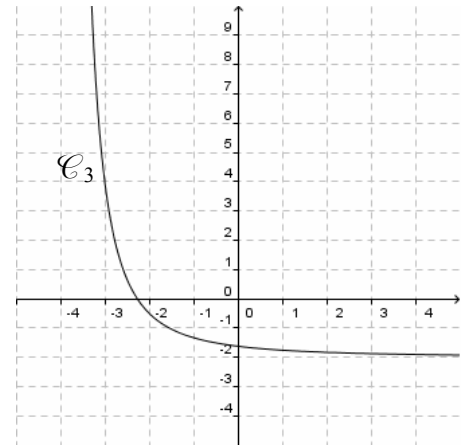
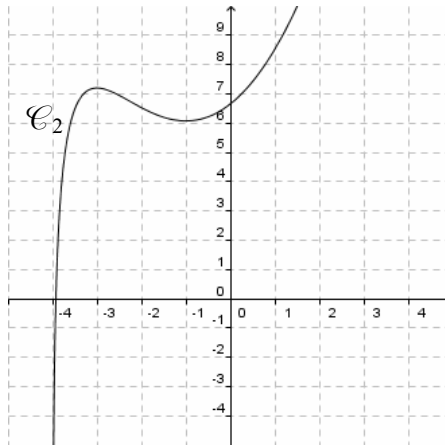
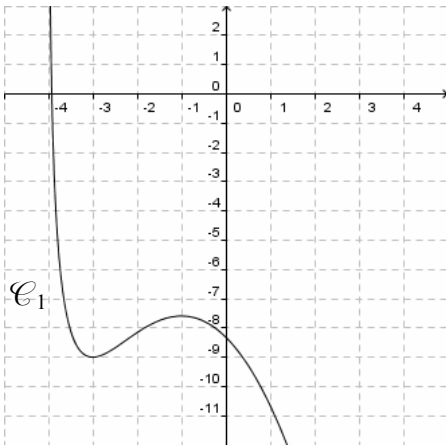
La courbe Γ ci-contre est la représentation graphique dans un repère orthogonal de f' , la fonction dérivée de f sur $]-4 ; +\infty[$.

Cette courbe Γ passe par les points $A(-3 ; 0)$, $B(-1 ; 0)$ et $C(0 ; -1,5)$.



Partie A

1. A l'aide de la représentation graphique de la fonction dérivée f' , déterminer $f'(0)$ et $f'(-3)$.
2. Trois courbes sont présentées ci-dessous. Une seule de ces trois courbes peut représenter la fonction f . Déterminer laquelle des trois représentations graphiques ci-dessous est celle de la fonction f , en justifiant votre réponse :



Partie B

On suppose qu'il existe deux entiers relatifs a et b tels que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-4 ; +\infty[$, on a $f(x) = ax^2 + b \ln(x+4)$.

1. a. Soit x un réel appartenant à l'intervalle $]-4 ; +\infty[$.
Exprimer $f'(x)$ en fonction de x , a et b .
b. Dédire des questions précédentes que $a = -1$ et $b = -6$.
2. On considère l'intégrale $I = \int_{-3}^{-1} f'(x) dx$
 - a. Calculer la valeur exacte de l'intégrale I puis en donner une valeur arrondie au dixième.
 - b. Donner une interprétation géométrique de l'intégrale I .