

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

INFORMATIQUE DE GESTION

Options : - Développeur d'applications
- Administrateur de réseaux locaux d'entreprise

SESSION 2010

SUJET

ÉPREUVE E2 – MATHÉMATIQUES I

Durée : 3 heures

coefficient : 2

Calculatrice autorisée, conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 :

« Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante, sont autorisées.

Les échanges de machines entre candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices sont interdits ».

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet. Il comprend :

- 4 pages numérotées de la page 1/4 à 4/4.
- le formulaire de mathématiques composé de 4 pages.

EXERCICE 1 .

(4 points)

Première partie

On considère la matrice carrée d'ordre 5 : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Recopier et compléter les matrices : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(On rappelle que $A^2 = A \times A$ et que $A^4 = A^2 \times A^2$)

Deuxième partie

Soit (G) le graphe à 5 sommets (a, b, c, d, e) dont la matrice d'adjacence est A .

1) D'après les calculs de la première partie :

- Combien existe-t-il de chemins de longueurs 2 ayant pour origine le sommet c ?
- Existe-t-il dans ce graphe un chemin hamiltonien ?

2) Faire le tableau des prédécesseurs du graphe (G).

3) Donner le niveau de chacun des sommets.

On pourra par exemple utiliser l'algorithme suivant :

- les sommets sans prédécesseur sont de niveau 0 ;
- on barre les sommets de niveau 0. Les sommets qui n'ont alors plus de prédécesseur sont de niveau 1 ;
- on barre les sommets de niveau 1. Les sommets qui n'ont alors plus de prédécesseur sont de niveau 2 ;
- on continue jusqu'à ce qu'on ait établi le niveau de chaque sommet.

4) Dessiner le graphe (G) ordonné par niveau.

EXERCICE 2 .

(10 points)

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis au millième.

La société « Tournesol » construit et commercialise son « Triphone » : nouvel appareil assurant les fonctions d'un ordinateur portable, d'un téléphone portable et d'un agenda électronique. Les pourcentages des ventes de ce nouvel appareil au sein du segment « haut de gamme » sont donnés, au fil des semaines, dans le tableau ci-dessous.

x_i : rang de la semaine	0	1	2	3	4	5	6
y_i : pourcentage des ventes	0,3	1,1	2,2	4,1	7,4	12,5	17,9

Première partie : recherche d'une première modélisation

- 1) Représenter sur papier millimétré le nuage de points défini par la série statistique $(x_i, y_i)_{i=1...7}$.
On prendra comme unités graphiques : 1cm pour 1 semaine en abscisses (entre 0 et 15)
1cm pour 2 % en ordonnées (entre 0 et 40)
- 2) La disposition de ces points suggérant qu'un ajustement affine n'est pas le mieux adapté à la situation, on s'intéresse à la série statistique $(x_i, z_i)_{i=1...7}$ où, $z_i = \ln y_i$ pour $i = 1...7$.
Reproduire et compléter le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	0,3	1,1	2,2	4,1	7,4	12,5	17,9
$z_i = \ln y_i$							

- 3) À l'aide de la calculatrice, donner le coefficient de corrélation des séries (z_i) et (x_i) et interpréter ce résultat.
- 4) À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite de régression de z en x .
- 5) Montrer dans ces conditions que y peut s'exprimer en fonction de x , à l'aide de la fonction f définie par $f(x) = 0,472 e^{0,655x}$.
- 6) Calculer $f(9)$. Que penser de ce résultat ?

Deuxième partie : recherche d'une meilleure modélisation

On décide d'envisager une autre modélisation et pour cela on considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{30}{1 + 60e^{-0,75x}}$

- 1) Étude du sens de variation de la fonction g
 - a. Montrer que pour tout nombre réel $x \geq 0$, $g'(x) = \frac{1350e^{-0,75x}}{(1 + 60e^{-0,75x})^2}$.
 - b. Étudier le signe de $g'(x)$; et en déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

- 2) Étude des limites
 - a. Déterminer la limite, quand x tend vers $+\infty$, de la fonction h définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $h(x) = e^{-0,75x}$ et en déduire la limite de la fonction g en $+\infty$.
 - b. Quelle interprétation graphique peut-on donner de ce résultat ?
 - c. Traduire ce résultat en terme d'évolution des pourcentages de ventes du « Triphone ».
- 3) Représenter graphiquement la fonction g sur l'intervalle $[0,15]$ dans le même repère que le nuage de points précédent.
- 4) Les objectifs commerciaux du « Triphone » sont atteints lorsque le pourcentage des ventes atteint 25% du segment « haut de gamme ».
Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = 25$ et préciser à partir de quelle semaine les objectifs commerciaux sont atteints. (On fera figurer sur le graphique tous les traits indiquant la méthode de lecture).

EXERCICE 3 .

(6 points)

Le « Triphone » est équipé d'une batterie révolutionnaire de longue durée, mais dont les performances sont encore irrégulières.

Première partie Dans cette partie, les résultats seront donnés avec la précision de la table.

Une batterie étant choisie au hasard dans le stock de l'entreprise, on admet que son autonomie est une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne $m = 12$ heures et d'écart-type $s = 2$ heures.

- 1) Calculer la probabilité $p(X \leq 15)$ que l'autonomie de la batterie soit inférieure à 15 heures.
- 2) Calculer la probabilité que l'autonomie de la batterie soit supérieure à 8 heures.
- 3) Déterminer le nombre réel positif h tel que $p(12 - h \leq X \leq 12 + h) = 0,95$.

Deuxième partie Dans cette partie, les résultats seront arrondis au dix millième

Pour assurer sa suprématie sur la concurrence, la société « Tournesol » décide de ne pas commercialiser les batteries dont l'autonomie serait inférieure à 8 heures. On a déterminé statistiquement que ces batteries représentent 2 % de la production.

À la sortie de la chaîne de fabrication, on prélève un lot de 50 batteries. La production de batteries est suffisante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un prélèvement successif avec remise. On note Y la variable aléatoire qui, à tout lot de 50 batteries prélevées au hasard dans la production, associe le nombre de batteries non commercialisables.

- 1) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y ? Donner les paramètres de cette loi.
- 2) Quelle est la probabilité qu'il y ait dans un tel lot exactement 2 batteries non commercialisables ?
- 3) Quelle est la probabilité qu'il y ait dans un tel lot au moins 2 batteries non commercialisables ?

Troisième partie Dans cette partie, les résultats seront donnés avec la précision permise par la table.

On prélève cette fois un lot de 200 batteries, exactement dans les mêmes conditions que dans la deuxième partie. On note Y' la variable aléatoire qui fait correspondre à chaque lot le nombre de batteries non commercialisables.

- 1) On admet que cette variable aléatoire Y' peut être approchée par une variable aléatoire Z qui suit une loi de Poisson. Démontrer que le paramètre de cette loi Z est 4.
- 2) Quelle est la probabilité qu'un lot ne contienne aucune batterie non commercialisable ?
- 3) Quelle est la probabilité qu'il y ait dans un lot au plus trois batteries non commercialisables ?

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

BTS INFORMATIQUE DE GESTION

1. RELATIONS FONCTIONNELLES :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \text{ où } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$$

$$a^t = e^{t \ln a}, \text{ où } a > 0$$

$$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}, \text{ où } t > 0$$

2. CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 ;$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = +\infty ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = 0 ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \ln t = 0 .$$

Croissances comparées à l'infini

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$$

b) Dérivées et primitives :

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$
e^t	e^t
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$

Opérations

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \text{ } u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Intégration par parties (PROGRAMME FACULTATIF) :

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$$

d) Développements limités (PROGRAMME FACULTATIF)

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} t^n + t^n \varepsilon(t)$$

e) Équations différentielles (PROGRAMME FACULTATIF)

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t) x' + b(t) x = 0$	$f(t) = k e^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$

3. PROBABILITES :

a) Loi binomiale $P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$;

$$E(X) = np \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

b) Loi de Poisson

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

$k \backslash \lambda$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0003
6			0,0000	0,0000	0,0000

$k \backslash \lambda$	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,368	0,223	0,135	0,050	0,018	0,007	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
1	0,368	0,335	0,271	0,149	0,073	0,034	0,015	0,006	0,003	0,001	0,000
2	0,184	0,251	0,271	0,224	0,147	0,084	0,045	0,022	0,011	0,005	0,002
3	0,061	0,126	0,180	0,224	0,195	0,140	0,089	0,052	0,029	0,015	0,008
4	0,015	0,047	0,090	0,168	0,195	0,176	0,134	0,091	0,057	0,034	0,019
5	0,003	0,014	0,036	0,101	0,156	0,176	0,161	0,128	0,092	0,061	0,038
6	0,001	0,004	0,012	0,050	0,104	0,146	0,161	0,149	0,122	0,091	0,063
7	0,000	0,001	0,003	0,022	0,060	0,104	0,138	0,149	0,140	0,117	0,090
8		0,000	0,001	0,008	0,030	0,065	0,103	0,130	0,140	0,132	0,113
9			0,000	0,003	0,013	0,036	0,069	0,101	0,124	0,132	0,125
10				0,001	0,005	0,018	0,041	0,071	0,099	0,119	0,125
11				0,000	0,002	0,008	0,023	0,045	0,072	0,097	0,114
12					0,001	0,003	0,011	0,026	0,048	0,073	0,095
13					0,000	0,001	0,005	0,014	0,030	0,050	0,073
14						0,000	0,002	0,007	0,017	0,032	0,052
15							0,001	0,003	0,009	0,019	0,035
16							0,000	0,001	0,005	0,011	0,022
17								0,001	0,002	0,006	0,013
18								0,000	0,001	0,003	0,007
19									0,000	0,001	0,004
20										0,001	0,002
21										0,000	0,001
22											0,000

c) Loi exponentielle (PROGRAMME FACULTATIF)

$$\text{Fonction de fiabilité : } R(t) = e^{-\lambda t}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad (\text{M.T.B.F.})$$

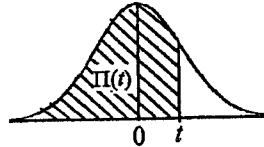
$$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$$

d) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$